

MA-111 Cálculo I- 1a LISTA

1. Mostre que $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ e que vale a igualdade se e somente se $x = y$.
2. Mostre que $x^2 - xy + y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ e que vale a igualdade se e somente se $x = y = 0$.
3. Resolva a equação $\left| \frac{3x+8}{2x-3} \right| = 4$.
4. Considere dois números $a, b \in \mathbf{R}$ tais que a é racional e b é irracional. Então $a + b$ pode ser racional? Justifique sua resposta (i.e. demonstre).
5. Se $0 < x < y$ prove que $\sqrt[3]{y-x} > \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}$.
6. Mostre que:
 - a) $x \neq y \implies x^2 + 2xy < 2x^2 + 2y^2$
 - b) $|x| < x^2 + 1, \forall x \in \mathbf{R}$
 - c) $|x - y| < 1/2, |x + 2| < 1/3 \implies |y + 2| < 5/6$
 - d) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \forall x, y \geq 0$
7. Para cada uma das afirmações abaixo, demonstre se verdadeiro ou dê contra-exemplo se for falso.
 - a) $|x - y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$
 - b) $x < y \implies x^2 < y^2$
 - c) $x < y \iff 1/y < 1/x$
 - d) $\sqrt{x^2} = x, \forall x \in \mathbf{R}$
 - e) $x \neq y \implies |x| \neq |y|$
 - f) $|x - y| \geq |x| - |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$
8. Encontre todos os números reais que satisfazem cada uma das desigualdades abaixo. Dê o intervalo solução e ilustre a solução sobre a reta real.
 - a) $(2 - x)(x - 4) > 0$
 - b) $1 - x^2 < 0$
 - c) $2 \leq \frac{2}{3x-1} \leq \frac{20}{3}$
 - d) $\frac{1}{2x+3} \leq \frac{x-1}{3} \leq \frac{1}{5}$
 - e) $(x - 1)^2 < 1 - x$
 - f) $(2x - 7)^{15} \leq 0$
 - g) $(2 - 5x)^{20} > 0$
 - h) $\frac{x-3}{x-5} > 0$
 - i) $\frac{3}{x} + \frac{x-3}{x-1} < \frac{2}{x-1}$
 - j) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} \geq 5$

9. Encontre os valores de x para os quais cada um dos números abaixo é real.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{\frac{5x-2}{x^2-4}} & \text{b)} \sqrt[4]{\frac{x^2-x-2}{x^2-4x-3}} \\ \text{c)} \sqrt{7x+9} & \text{d)} \sqrt{x^2+x+3} \end{array}$$

10. Encontre todos os números reais que satisfazem cada uma das desigualdades abaixo. Dê o intervalo solução e ilustre a solução sobre a reta real.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} |x+5| \geq \sqrt{2} & \text{b)} |x-1| \leq |x+1| \\ \text{c)} |2x+1| \leq 1 & \text{d)} \left| \frac{x}{x^2+1} \right| \leq 1 \\ \text{e)} \left| \frac{x-3}{x+7} \right| > 0 & \text{f)} |x+4| \geq |x+1| \\ \text{g)} |2x-3| < 5 & \text{h)} |4-x| \geq 1 \\ \text{i)} |6+4x| < \left| 2 - \frac{x}{2} \right| & \text{j)} \left| \frac{5}{3x-2} \right| \geq \left| \frac{2}{x-1} \right| \\ \text{k)} 7+|x| < \frac{1}{x+2} & \text{l)} \left| \frac{2x-3}{x+1} \right| \leq \frac{1}{2} \end{array}$$

11. Mostre que dado um número p inteiro primo então $\sqrt{p}$ é irracional. Se q é outro inteiro primo diferente de p , use a mesma idéia para mostrar que $\sqrt{pq}$ também é irracional.