

5a. Lista de Exercícios

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
Maio de 2014

Teorema de Poincaré-Bendixson

1. Mostre que o conjunto limite $L_\omega(x)$ de todo ponto x de um sistema dinâmico é fechado.
2. O conjunto limite $L_\omega(x)$ pode pertencer ou não ao domínio do campo de vetores de um sistema $x' = X(x)$ em uma variedade M . Dê exemplos onde $L_\omega(x)$ não é limitado, com $L_\omega(x)$ fora do domínio do campo (no seu fecho), e com $L_\omega(x)$ no interior do domínio.
3. Se $L_\omega(x)$ for compacto então ele é conexo. Dê um exemplo de retrato de fase onde $L_\omega(x)$ não é compacto nem conexo
4. Verifique que fluxo irracional no toro T^2 , i.e. $\varphi_t(x, y) = (x + t, y + \alpha t) \bmod \mathbf{Z}^2$, com α irracional é tal que para todo ponto p do toro, $L_\alpha(x) = L_\omega(x) = T^2$.
5. Se X é um conjunto invariante, minimal com essa propriedade, compacto i.e., não contém subconjuntos próprios invariantes então
 - a) Toda trajetória em X é densa em X .
 - b) Para todo $x \in X$, $L_\alpha(x) = L_\omega(x) = X$.
6. Mostre a recíproca da questão acima: seja X um conjunto invariante fechado de um fluxo completo φ_t em \mathbb{R}^n . Se para todo $x \in X$, $L_\alpha(x) = L_\omega(x) = X$ então X é compacto.
7. Do livro de Hirsh e Smale, Capítulo 11: Sessão 1 (pág 241): 1,5,6. Sessão 3 (pág 247): 1,2,4. Sessão 4 (pág 249): 1,2. Sessão 5 (pág 253): 1-6.
8. Use o teorema de Poincaré-Bendixson para mostrar que o sistema $(x', y') = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2))$ tem pelo menos uma órbita periódica no anel $A = \{x \in \mathbf{R}^2; 1/2 < \|x\| < 2\}$. Identifique essa órbita e verifique se é ciclo limite estável (atrator de uma vizinhança dela), instável ou nem um dos dois casos.

9. Mais exercícios parecidos com esse acima no Perko, página 231.