2a. Lista de Exercícios

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
maio de 2014

1. Demonstre o Teorema de Peano. Por que esse resultado não vale em dimensão infinita?

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existam duas soluções $\varphi_1, \varphi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ de $x' = f(t,x)$ satisfazendo: 1) $Graf(\varphi_1) \bigcap Graf(\varphi_2) = \{(0,p),(1,q)\}$; e 2)$Graf(\varphi_1) \bigcup Graf(\varphi_2)$ é a fronteira de uma região D homeomorfa a um disco. Prove que para todo $x \in D$ existe uma solução φ de $x' = f(t,x)$ tal que seu gráfico contém os pontos x, $(0,p)$ e $(1,q)$.

3. Considere a equação diferencial $x' = X(x)$ em $\mathbf{R}^n$ onde X é um campo de classe C^1 com $X(0) = 0$.

   a) Suponha que S, uma subvariedade de $\mathbf{R}^n$ de dimensão 1 passando pela origem, seja invariante pelo fluxo. Verifique que sua tangente na origem T_0S é uma direção de autovetores de D_0X. Além disso, se todo ponto de S converge para a origem quando $t \to +\infty$ então os autovalores associados são não-positivos. Analogamente, se todo ponto de S converge para a origem quando $t \to -\infty$ então os autovalores associados são não-negativos.

   b) Suponha que $n = 2$ e que pela origem passam 3 subvariedades invariantes pelo fluxo, duas contraindo para 0 e outra repelindo, tais que duas a duas seus espaços tangentes são l.i. Mostre que $D_0X = 0$.

4. Demonstre a desigualdade de Gronwall. Aplique essa desigualdade para mostrar que se K é a constante de Lipschitz (na variável espacial) de uma função contínua $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ então as soluções $\varphi(t,t_0,x_0)$ e $\varphi(t,t_0,y_0)$ da equação diferencial associada ao campo determinado por f com condições iniciais x_0 e y_0, respectivamente, satisfazem a seguinte condição de limitação superior das distâncias:

$$|\varphi(t,t_0,x_0) - \varphi(t,t_0,y_0)| \leq e^{K|t-t_0|}|x_0 - y_0|.$$

Por outro lado, dê um exemplo em $\mathbb{R}^2$ para mostrar que $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pode ser contínua com

$$k|x-y| \leq |f(t,x) - f(t,y)|$$

para todo $(t,x),(t,y)$ em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ e no entanto não temos uma limitação inferior:

$$|x_0 - y_0|e^{k|t-t_0|} \leq |\varphi(t,t_0,x_0) - \varphi(t,t_0,y_0)|.$$

5. Seja $\Omega = \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Mostre que se x_0 não for ponto fixo da equação $x' = f(x)$ então a solução é da forma

$$\varphi(t) = \frac{1+ce^t}{1-ce^t},$$

com $c \neq 0$. Qual é o intervalo máximo de definição destas soluções $I(x) = (\omega_-(x), \omega_+(x))$? Faça um esboço geométrico das soluções em Ω. Verifique se os pontos fixos são hiperbólicos. Esboce as subvariedades estáveis e instáveis onde for o caso.

6. Determine explicitamente a solução do sistema em $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$(x', y') = (2x + y + 1, 2y),$$

com condição inicial $x(0) = x_0$. Determine e ache a solução fundamental da equação linearizada deste sistema. Dê uma interpretação geométrica para o sistema linearizado.

7. Seja $x = (x_1, \ldots, x_{n+d}) \in \mathbb{R}^{n+d}$ e considere a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = f_j(t, x(t)) & \text{para } j = 1, \ldots, n \\ \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{n+d} \end{cases}$$

Determine condições sobre a $f : \mathbb{R}^{n+d} \to \mathbb{R}^n$ para que exista uma solução para esse sistema (chamado de *sub-determinado*). Demonstre sua afirmação. Dê um exemplo. É possível estabelecer a unicidade da solução?

8. Defina conjugação topológica (C^0) e C^k entre dois fluxos. Aponte condições necessárias e suficientes para que dois campos de vetores sejam conjugados.

9. Exercícios do 2o. Capítulo do livro do Sotomayor: 1, 2, 7, 9 e 10 (aplicação direta da teoria, pense em exemplos). Mais difíceis, mas interessantes: 3, 4, 5, 6, 11.

10. Seja X um campo vetorial em uma variedade diferenciável M e $\Psi : M \to N$ é um difeomorfismo, mostre que X é completo se e somente se $d\Psi(X)$ é completo. Dê exemplos de campos completos e não completos e respectivas imagens por difeomorfismos.

11. Mostre que se a derivada de um campo é limitada, esse campo é completo (exemplos?). Se uma variedade for compacta, todo campo é completo.