

## 1a. Lista de Exercícios

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.

março de 2014

1. Dê um exemplo de uma EDO autônoma em  $\mathbb{R}$  com  $x' = f(x)$  e  $x(0) = 1$  que não tem solução única. Idem com condição inicial  $x(1) = 1$ . (Sugestão:  $f(x) = 3(x-1)^{2/3}$ ,  $x(t) \equiv 1$  e  $x(t) = (t-1)^3 + 1$ ).
2. Dê um exemplo de uma EDO autônoma em  $\mathbb{R}^2$  tal que existem duas soluções distintas que só coincidem em  $t = 0$  no ponto  $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ . (Sugestão:  $x' = 3(x-1)^{2/3}$ ,  $y' = 1$  com soluções  $x(t)$  como acima e  $y(t) = t + 1$ ).
3. Verifique que se uma EDO  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  tem duas soluções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  que se cruzam em  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  então  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  se tangenciam em  $t = t_0$ .
4. Se  $T$  é uma matriz  $n \times n$  inversível, mostre que  $\|T^{-1}\| \geq \frac{1}{\|T\|}$ .
5. Se  $T$  é uma matriz  $n \times n$  com  $\|I - T\| < 1$ , mostre que  $T$  é inversível e que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (I - T)^k$$

converge absolutamente para  $T^{-1}$ .

6. Em cada caso abaixo, dê um exemplo de uma matriz de coeficientes  $A$  tal que o sistema linear  $x' = Ax$  tenha uma condição inicial  $x(0)$  com solução  $x(t)$  tal que: a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = \infty$ ; b) para cada solução não nula existem constantes  $m < M$  tais que  $m \leq \|x(t)\| \leq M$ ; c)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = \infty$ ; d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$  não existe; e)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\|$  não existe.
7. Verifique se existe uma equação diferencial linear  $x' = A(t)x$  em  $\mathbf{R}^2$ , com  $A(t)$  constante por partes que, de  $t = 0$  até  $t = 2$ , leva simultaneamente: o ponto  $(1, 3)$  em  $(-2, -6)$  e o ponto  $(3, -1)$  em  $(-3, 1)$ . Faça o mesmo para os pares de pontos: de  $(1, 3)$  em  $(3, -1)$  e  $(3, -1)$  em  $(1, 3)$ .  
 $A(t)$  precisa ser contínua para garantir a existência e unicidade de solução?
8. a) Seja  $\varphi(t)$  uma família de matrizes não-singulares cujas entradas tem derivada contínua em todo  $t \in \mathbb{R}$ . Prove que existe uma única matriz  $A(t)$  contínua tal que  $\varphi(t)$  é uma solução fundamental da equação linear  $x' = A(t)x$ . O determinante de  $\varphi(t)$  precisa ser positivo?  
  
b) Use o item acima para mostrar que  $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$  se e somente se o colchete  $[A, B] := AB - BA$  for zero.
9. Use o item (a) do exercício acima para mostrar que se  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$  então

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)} e^{\frac{t^2}{2}[A, B]} = e^{t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A, B]}.$$

10. Generalize o exercício acima e verifique os primeiros termos da fórmula de Baker-Hausdorff-Campbell, para um par  $A, B$  de matrizes  $n \times n$ :

$$e^A e^B = e^Z$$

com

$$Z = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] - \frac{1}{24}[B, [A, [A, B]]] + \dots$$

11. Dada a equação linear  $x' = Ax$  em  $\mathbb{R}^n$  com condição inicial  $x(0) = x_0$ , exiba a série de Taylor da curva  $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Verifique que esta série converge para todo  $t$  (uniformemente em cada compacto).
12. Se  $A(t)$  é anti-simétrica para todo  $t \in \mathbb{R}$ , mostre que a solução fundamental da EDO linear  $x' = A(t)x$  satisfaz  $\Phi(t)^* \Phi(t) = C$  constante, onde  $\Phi(t)^*$  é a transposta da matriz  $\Phi(t)$ . Em particular, se  $\Phi(t)$  é ortogonal para algum  $t \in \mathbb{R}$  então  $\Phi(t)$  é ortogonal para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
13. Prove que para uma matriz quadrada  $A$ : a)  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ ; b)  $\det e^A = e^{\text{tr}A}$  onde  $\text{tr}A$  é o traço da matriz  $A$ .
14. Seja  $\Phi(t)$  uma matriz  $n \times n$  com entradas de classe  $C^1$ . Se  $\Phi(0) = I$  e  $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ , prove que existe uma única matriz  $A$  tal que  $\Phi(t) = e^{tA}$ .
15. Seja  $A$  uma matriz (real ou complexa). a) Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{A}{n} \right)^n = e^A.$$

b) Mostre que:

$$\frac{d}{dt} \det(I + tA)_{t=0} = \text{tr}A.$$

16. Seja  $C$  uma matriz complexa com  $\det C \neq 0$ . Mostre que existe uma matriz complexa  $B$  tal que  $e^B = C$ .
17. Para toda matriz real  $D$  com  $\det D \neq 0$  existe uma matriz real  $B$  tal que  $e^B = D^2$ .
18. Resolva os sistemas lineares e identifique os subespaços estáveis  $E^s$ , instável  $E^u$  e central  $E^c$ .

a)

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} x$$

b)

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

19. Resolva o sistema linear não homogêneo

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

com condição inicial  $x(0) = (1, 0)$ .