MT403, Análise Numérica, A
MS612, Análise Numérica II,
Segundo Semestre de 2022, UNICAMP

Prova 1

Responde a pelo menos 3 das seguintes 4 questões.

(1) Considere o método $\Psi(h)$ de diferenças finitas: $\Psi(h)_i = \alpha y_{i+1} + \beta y_i + \gamma y_{i-1}$

- Computar o erro de truncamento local deste método para aproximar $y'(x_i)$, onde $x_i = x_0 + ih$, com $h > 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$
- Determine uma terna $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ associadas a um método $\Psi(h)$ de ordem 1 e outras terna $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ associadas a um método $\Psi(h)$ de ordem 2.

(2) Considere os dois seguintes problemas de contorno PVC:

$$\begin{cases} -u'' = 2x - 1, & -1 < x < 1 \\ u'(-1) = 1 \\ u'(1) = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -u'' = 2x - 1, & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1 \\ u'(1) = 2 \end{cases}$$

- Qual destes problemas admite uma única solução? Motive a sua resposta.
- Descreve um método de ordem 2 para aproximar a solução do problema PVC com solução.
- Determine o seu erro de truncamento, analise a sua consistência, estabilidade e convergência do método.

(3) Considere o PVI

$$\begin{cases} u'(t) = 1 + u(t) + 2t, & t > 1 \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

- Existe uma única solução do PVI em $T = 10$? Motive a sua resposta.
- Descrever dois métodos explícitos (de um passo) de segunda ordem para aproximar a solução do PVI em $T = 10$. Escrever dois passos destes dois métodos começando com $U^0 = 2$, ou seja determine U^1 e U^2 de cada método.
- Considere o método de Runge Kutta implícito de r estágios do tipo DIRK, ou seja com $a_{ii} \neq 0$ e $a_{ij} = 0$ se $j > i$, matriz de Butcher

$$\begin{array}{c|ccccc} c_1 & a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ c_r & a_{r1} & a_{r_2} & \dots & \dots & a_{rr} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_r \end{array}$$

Implemente um passo deste método aplicado a PVI em cima usando $U^0 = 2$.

(4)

- Definir a convergência de um método multipasso linear de r passos a solução do PVI genérico $\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = f(u(t), t), t > t_0 \\ u(t_0) = \eta \end{array} \right.$
- Demonstre que o método de mid-point (do ponto médio) é consistente, zero-estável e convergente.