MT403, Análise Numérica,
MS612, Análise Numérica II,
Segundo Semestre de 2022, UNICAMP

Lista de Exercícios 5

(1) Descreva porque o problema da difusão do calor numa barra metálica $[a, b]$ com coeficiente de condução térmica $c > 0$ constante pode ser escrito como segue se conhecemos a temperatura no ponto a e no ponto b e a temperatura inicial $\eta(x)$.

$$\begin{cases} u_t = cu_{xx}, (x,t) \in]a,b[\times[t_0,\infty[\\ u(0,t) = u_0 \\ u(1,t) = u_1 \\ u(x,t_0) = \eta(x) \end{cases} \tag{1}$$

E se conhecêssemos o fluxo de calor no contorno como rescreveria o problema diferencial em cima?

(2) Porque o problema parabólico do item anterior com $c < 0$ é um problema mal posto se $c < 0$. Demonstre que é mal posto.
Independentemente do sinal de c porque este problema se pode classificar como parabólico?

(3) Se deseja encontrar uma estimativa da temperatura em toda a barra no tempo $T > t_0$ usando três métodos numéricos, : FTCS , BTCS e Crank-Nicolson. Nos métodos use um passo k no tempo e uma malha uniforme no espaço de espaçamento h.

(a) Para cada um dos três métodos escreva um algoritmo (só com a descrição da estratégia numérica sem necessidade de usar o formalismo de uma linguagem de programação específica) para poder encontrar a estimativa de $u(x, T)$ em todos os x_j da malha no tempo T

(b) Qual dos três métodos necessita menos computações (operações) para obter a aproximação $u(x, T)$ em todos os x?

(c) Qual é o erro de truncamento local dos três métodos no ponto $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ no tempo T? Determine eles.

(d) Seja $\bar{U}_M$ o valor obtido do método no ponto $\bar{x}$ e tempo T, o erro truncamento (em valor absoluto) fornece uma boa estimativa do erro $|\bar{U}_M - u(x, T)|$? Motive a sua resposta.

(4) Dar a definição de consistência e convergência de um método genérico para resolver um problema parabólico.

(5) Qual é a diferença entre estabilidade de Lax-Richtmyer e estabilidade forte? Qual é a utilidade de uma e da outra?
Se resolver um problema parabólico numericamente num computador através um método de diferenças finitas qual estabilidade garantirá de ter boas aproximações da solução? Motive a sua resposta com um exemplo.

(6) Demonstre que a condição de Lax-Richtmyer adicionada a consistência do método garante a convergência do mesmo com a mesma ordem do erro de truncamento local.

(7) Demonstre que FTCS, BTCS, e Crank-Nicolson podem ser escritos como métodos das linhas.

(8) Porque é "fácil"analisar a estabilidade de um método numérico se eles pode ser escrito como um método das linhas? Responder através um exemplo.

(9) Define um método das linhas de segunda ordem no espaço e de ordem um no tempo aplicado ao problema

$$\begin{cases} u_t = cu_{xx} + u, (x,t) \in]a,b[\times[t_0,+\infty[\\ u(0,t) = u_0 \\ u_x(1,t) = u'_1 \\ u(x,t_0) = \eta(x) \end{cases}$$

(10) Provar que FTCS aplicado a (1) é estável (fortemente) se $k \leq \frac{1}{2}h^2$. Porque esta condição não é útil se deseja aproximar a solução do problema para tempos grandes?

(11) Provar que BTCS e Crank-Nicolson são sempre estáveis

(12) Agora usando a análise de Von-Neumann demonstre novamente que BTCS e Crank-Nicolson são sempre estáveis.

(13) Descreve porque a problema do calor é um problema muito stiff, escrevendo a solução em termo da expansão em serie dos senos de Fourier.

(14) Determine a condição de estabilidade do método FTCS aplicado ao problema de calor em duas dimensões no espaço

(15) Descreva em detalhes o método ADI e o método LOD. Qual é a utilidades deles se deseja resolver um problema parabólico em duas dimensões no espaço?