MT403, Análise Numérica,
MS612, Análise Numérica II,
Segundo Semestre de 2022, UNICAMP

Lista de Exercícios 4

(1) Considere o problema

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda(u(t) - s(t)) + \frac{ds(t)}{dt} \\ u(t_0) = s(t_0) + 4 \end{cases} \tag{1}$$

com $s(t)$ uma função suave (com derivadas limitadas)

(a) Demonstre, apos dar a definição de problema stiff, que este problema é stiff se tiver $\lambda < 0$ com modulo de λ grande. Use um gráfico para resolver a esta questão.

(b) O que acontece se λ for um real positivo? O problema é ainda stiff?

(c) Qual seria a condição de estabilidade (absoluta) sobre o espaçamento k neste problema se usar Forward Euler com $\lambda = -1$ e $\lambda = -100$? Qual seria a situação melhor ao nível computacional se deseja estimar a solução em $t = 100$ partindo com $t_0 = 0$ com erro menor de $\epsilon = 0.01$?

(d) Implemente dois passos de Euler avançado usando a condição de estabilidade nos dois casos ($\lambda = -1$) e ($\lambda = -1000$)

(2) Porque num problema stiff, quando se deseja aproxima bem a solução, se preferem usar métodos que tem a região de estabilidade maior possível? Dé um exemplo de um método melhor (com região de estabilidade maior) de FE e diga como resolver os casos (item c e d) do item anterior com $\epsilon = 0.01$.

(3)

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

- Porque independentemente do λ este não é um problema stiff?
- Se em vez perturbamos a solução no meio do intervalo $]0, 2[$, o problema é stiff quando?
- Se λ for imaginário o problema é stiff?

(4) Dar a definição de problema stiff comparando k_{stab} obtido da condição na fronteira e k_{acc} obtido da análise do erro. Porque resulta ser ruim ao nível computacional resolver numericamente um problema stiff?

(5) Considere o sistema

$$\begin{cases} u_1'(t) = -\lambda_1 u_1(t) \\ u_2'(t) = +\lambda_1 u_1(t) - \lambda_2 u_2(t) \end{cases}$$

- verificar, encontrando a solução teorica u_1, u_2, que este problema é stiff se $\lambda_1 >> \lambda_2 > 0$
- Implementa uma iteração de Forward Euler deste método usando um k que garante a estabilidade se $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 1$
- Determine um método incondicionalmente estável para este problema e implemente um passo deste método

(6) Qual é a utilidade no usar o stiffness ratio como medida de stiffness no resolver o sistema

$$\begin{cases} U' = AU, \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

quando A é diagonalizável? E se A for não diagonalizável?

(7) Considere um sistema de EDO: $U' = AU + g(t)$, $U(t_0) = U_0$, de dimensão m, com A diagonalizável. Achar as soluções $U(t)$ teóricas, e dizer como se poderiam aproximar a solução do sistema em $t = t_0 + 100$ usando o método de Forward Euler, métodos de Backward Euler e Trapézios. Que passo poderia utilizar se requer um erro menor de $\varepsilon = 1e - 3$ em cada um dos três métodos ?

(8) Dar a definição de L-estabilidade. Explicar quando é preferível usar um método L-estavel e quando é melhor usar um método não L-estavel para aproximar a solução de um problema stiff.
Se deseja aproximar bem (a menos de um erro ϵ muito pequeno) a solução (em todo o intervalo temporal $[0, 100]$) do problema (1) com $\lambda = 1000$ qual método preferiria utilizar? Motive a sua resposta.

E se deseja aproximar a solução do problema (1) com $\lambda = 1000$ só no tempo $t = 100$ (a menos de um erro ϵ não muito pequeno) qual método preferiria utilizar? Motive a sua resposta.

(9) Dar um exemplo de um método L-estável de primeiro e segunda ordem, e de um método A-estável de primeiro, segunda ordem, e terceira ordem. Se não conseguir encontrar métodos A-estáveis de terceira ordem, pode listar um método quase A-estáveis de terceira ordem.

(10) Demonstre que os métodos BDF (Backward Differentiation) de r passos tem no máximo ordem r. Demonstre que o BDF de 1 passo é Backward Euler.
E que o BDF de 2 passos (que é aquele de 2 passos de ordem 2) é

$$3U^{n+2} - 4U^{n+1} + U^n = 2kf(U^{n+2})$$

quando for aplicado ao problema $u' = f(u), u(t_0) = u_0$.

(11) Considere o BDF de dois passos do item anterior (também chamado BDF2) e prove que é A-estável. Na demonstração determine as raízes do polinômio caraterístico $\pi(\xi, z)$ associado ao método.

(12) Porque o seguinte método Runge-Kutta se chama TR-BDF2?

$$\begin{cases} Y_1 = U^n \\ Y_2 = U^n + \frac{k}{4}(f(Y_1) + f(Y_2)) \\ U^{n+1} = \frac{1}{3}(4Y_2 - Y_1 + kf(U^n)) \end{cases}$$

(13) Definir os Runge-Kutta-Chebyshev evidenciando a suas propriedades. Explicar como se podem construir os métodos de Runge-Kutta-Chebyshev, que contem o valor $z = -100$ na sua região de estabilidade.