MT403, Análise Numérica,
MS612, Análise Numérica II,
Segundo Semestre de 2022, UNICAMP

Lista de Exercícios 3

(1) Considere o seguinte problema de valor inicial PVI

$$\begin{cases} u' = f(u,t), \quad t > t_0 \\ u(t_0) = \eta \end{cases} \tag{1}$$

Seja LMM_r um método linear de r passos usado para aproximar a solução u de (1) no tempo T.

- Quando se pode dizer que o LMM_r converge?
- De um exemplo de LMM_3 consistente
- Em que condições um genérico método LMM_3 consistente converge?
- Dar um exemplo de LMM_3 convergente
- Define a zero-estabilidade de um genérico LMM_r
- Demostre para um LMM_r consistente que a zero-estabilidade garante a convergência do método.

(2) Considere o problema

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda(u(t) - s(t)) + \frac{ds(t)}{dt} \\ u(t_0) = s(t_0) \end{cases} \tag{2}$$

com $s(t)$ uma função suave (com derivadas limitadas)

- Demonstre que $s(t)$ é solução do problema. É a única?
- Escreva o método de Euler avançado (FE), Euler atrasado (BE), método dos trapézios (TR), método do ponto médio (PM)
- Seja $\lambda = 10^4$, o que acontece na solução numérica de FE se tomar $k = 0.01$? Motive a sua resposta analizando o erro global, o erro local e os erros de arredondamento, supondo de ter erro inicial $E^0 = 0$.
- Qual é valor máximo de k para ter erros limitados?
- Responda aos mesmos dois itens anteriores usando BE e sucessivamente TR e PM.

(3) Determine a região de estabilidade do método do ponto médio aplicado a (2)

(4) Considere um LMM_r genérico aplicado a (2)

- define a região de estabilidade absoluta

- Seja $\xi_1(z)$ a raiz principal de $\pi(\xi, z)$ provar que a fronteira do método LMM_r é formada dos z tais que $|\xi_1(z)| = 1$
- Provar que para o método de Adams-Bashforth de ordem 2 tem $\xi_1(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + O(z^3)$ se z é próximo de 0

(5) Observando as figura 7.2 e 7.3 do livro, descreva porque:

- $z = 0$ está na região de estabilidade
- aumentando a ordem os métodos tem regiões de estabilidade com área sempre menor
- aumentando a ordem a região aparece sempre mais comprimida no eixo imaginário entre $-i$ e i
- Se estiver próximo da origem $z \approx 0$, então se $Re(z) < 0$ estarás na região de estabilidade e em vez se $Re(z) > 0$ estarás afora da região de estabilidade

(6) Seja A uma matriz normal e considere o seguinte sistema linear de EDO

$$\begin{aligned} &u'(t) = Au(t) + f(t) \quad t > t_0 \\ &u(t_0) = u_0 \end{aligned}$$

Determine quando os seguintes métodos são estáveis: FE, BE, TR, Adams-Bashforth de ordem 2, Adams-Moulton de ordem 2.

(7) Sabendo que $u(t) + v(t) = 1$ em cada instante do tempo, e que $u(0) = v(0) = 0.5$. Considere o sistema não linear para $t > 0$

$$\begin{cases} u' = -2uv + 2v \\ v' = -3uv + 3u \end{cases}$$

Determine se existir um passo k que garante que Forward Euler seja estável.