MT403, Análise Numérica, A
MS612, Análise Numérica II,
Segundo Semestre de 2022, UNICAMP

Lista de Exercícios 2

(1) Considere o seguinte problema de valor inicial PVI

$$\begin{cases} u' = t\sqrt{u} + u, & t > t_0 \\ u(t_0) = \eta \end{cases}$$

Considere $\eta = 0$, $\eta = -1$, $\eta = 1$ em quais casos o PVI no intervalo $[t_0, 10]$ admite uma única solução? E qual é? Motive a sua resposta.

(2) No problema

$$\begin{cases} u' = 100u, & t > t_0 \\ u(t_0) = \eta \end{cases}$$

explique se tiver solução analítica, e que aconteceria resolvendo o problema com um método de um passo com erro de um passo $\mathcal{L}_1 = 2k^2$ sabendo que $U^0 = \eta$ e com $|U^1 - u(t_1)| = 1$ é esperado que o erro aumente? De que tamanho?
É possível aproximar bem a solução em $t = 10$? Com que erro aproximativamente se em cada passo $\mathcal{L}_n$ é constante?

(3) Seja o método dos trapézios

$$U^{n+1} = U^n + \frac{k}{2}(f(U^n) + f(U^{n+1}))$$

determine:

- este método usando o método de quadratura dos trapézios;
- o erro de um passo do método;
- o erro de truncamento do método.

Escreva um algoritmo que permita com passo k de aproximar a solução de

$$\begin{cases} u' = 2u, & t > t_0 \\ u(t_0) = \eta \end{cases}$$

no tempo $T = 10$, usando o método dos trapézios.

(4) Prove que o método de dois passos

$$\frac{3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2k} = f(U^{n+1})$$

é de segunda ordem.

(5) Determine dois métodos explicito de terceira ordem para resolver o problema PVI

$$\begin{cases} u' = f(u(t), t), \quad t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

um usando a expansão em Serie de Taylor e o outro usando um método de Runge Kutta. Qual é vantagem no usar o método de Runge-Kutta respeito ao método da Serie de Taylor?

(6) Prove que os método de Runge Kutta de s estágios

$$\begin{aligned} Y_i &= U^n + k\sum_{i=1}^{s} a_{ij} f(Y_j, t_n + c_j k), \quad i = 1, \ldots, s; \\ U^{n+1} &= U^n + k\sum_{i=1}^{s} b_i f(Y_i, t_n + c_i k) \end{aligned}$$

são:

- consistentes, se $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$
- de primeira ordem, se $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ e $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i,\ i = 1, \ldots, s$

Para provar que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = c_i$ prove antes que $Y_i - u(t_n + c_i k) = O(k^2)$ para cada $i = 1, \ldots, s$.

(7) Prove que o seguinte método explicito de Runge Kutta é de segunda ordem

$$\begin{aligned} Y_1 &= U^n \\ Y_2 &= U^n + kf(Y_1, t_n) \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{k}{2}(f(Y_1, t_n) + f(Y_2, t_{n+1})) \end{aligned} \tag{1}$$

Este método é chamado método de Heun ou método de Euler modificado.

(8) Descreva o algoritmo de controle adaptativo do passo aplicado ao método explicito de Runge-Kutta de segunda ordem de Heun (1), ver item anterior, usando a extrapolação de Richardson.

(9) Responda ao mesmo item anterior mas usando o método de Runge Kutta incorporado com o método de Heun (1), e usando o seguinte método explicito de Runge-Kutta de terceira ordem.

$$\begin{aligned} Y_1 &= U^n \\ Y_2 &= U^n + \frac{k}{2} f(Y_1, t_n) \\ Y_3 &= U^n + 2kf(Y_2, t_n + \frac{k}{2}) - kf(Y_1, t_n) \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{k}{6}(f(Y_1, t_n) + 4f(Y_2, t_n + \frac{k}{2}) + f(Y_3, t_{n+1})) \end{aligned}$$

(10) Descreva as diferenças entre usar os métodos de um passos e os métodos multipassos.

(11) Prove que os métodos de Adams a r passos

$$U^{n+r} = U^{n+r-1} + k \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(U^{n+j})$$

são consistentes se

$$\sum_{j=0}^{r} \beta_j = 1.$$

(12) Prove que os métodos LMM a r passos

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j U^{n+j} = k \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(U^{n+j})$$

são consistentes se

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 0, \qquad \sum_{j=0}^{r} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{r} \beta_j.$$

(13) Suponha de aproximar os primeiro passos $U^0, U^1, \ldots, U^{r-1}$ com um método de ordem $p-1$ e implementar os restantes passos $U^r, U^{r+1}, \ldots$ com um LMM de ordem p. Porque obtêm um método de ordem p para aproximar a solução da PVI em $t = T$ com cumprimento de passo $k := T/N$ para um dado N inteiro e tal que $N > T$?