MT403, Análise Numérica I,
Segundo Semestre de 2019, UNICAMP

Lista de Exercícios 2

Entrega dos exercícios/programa marcados com (*) até Terça Feira 26/11/2019.

(1) (*) (PROGRAMA) Considere o seguinte problema diferencial hiperbólico com condições iniciais:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \quad , -1 < x < 1 \\
&u(x, 0) = \sin(\pi x)
\end{aligned}
$$

Deseja se encontrar a solução numérica deste problema no espaço $[-1, 1]$ e no intervalo de tempo $[0, 10]$.

- Verificar se trata-se de um problema hiperbólico
- Escreva um programa para resolver este problema, usando uma malha uniforme de espaçamento h, e com passo constante k no tempo e um método estável e convergente que use diferenças finitas.
- Toma cuidado com as condições a fronteira. Caso o problema falta de condições adicione aqueles que necessita.
- Motive a escolha do método implementado, e diga de que ordem no tempo e no espaço é o método usado para aproximar $u(x, t)$.
- Desenha o gráfico da solução encontrada nos tempos 2.5, 5, 7.5 e 10.
- E' possível determinar um método de ordem superior no tempo e no espaço, respeito aquele usado no programa? Motive a sua resposta.

Exercícios

(2) Definir quando (e se) os seguintes problemas diferenciais podem ser chamados stiff e dar um exemplo de f,F,A para que o problema seja Stiff:

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u'(t) = \lambda u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U'(t) = F(U(t)), \quad U(t) \in \mathbb{R}^n \\ U(t_0) = U_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} U'(t) = AU(t)) \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

(3) Que tipo de métodos são utilizáveis para ter uma aproximação de alta ordem nos problemas Stiff. Classifique estes métodos (classe de métodos, explicidade ou menos dos métodos, ordem de convergência) e dar exemplos gráficos onde um método pode ser preferível de outro.

(4) Definir a Estabilidade de Lax-Richtmyer para problemas Parabólicos e verificar quando os métodos FTCS, Backward Euler, Crank-Nicolson são Lax-Richtmyer estáveis nos casos seguintes, use a estratégia dos métodos das Linhas

- $\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx}, \text{com } \alpha \in \mathbb{R}, x \in [-1,1] \\ u(t_0) = u_0 \\ u(-1,t) = u(1,t) \end{cases}$
- $u_t = u_{xx} + sin(x)$ com as mesmas condições iniciais e de contorno do primeiro item
- $u_t = u_{xx} + u_x$ com as mesmas condições
- $u_t = u_{xx} + u$ com as mesmas condições

(5) Analisar a estabilidade dos problemas e métodos do item anterior com Von-Neumann.

(6) Classificar os problemas parabólicos elípticos e hiperbólicos de equações diferenciais em duas dimensões (x, y) ou (x, t) se for o caso. Dar um exemplo de problemas em cada caso.

(7) Provar que o método FTCS para o problema

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, t > t_0 \\ u(t_0) = \eta \end{cases} \tag{Ex0.0a}$$

não é estável, exceito quando $k = 0(h^2)$ (Lax-Richtmeyer estavel), e que em vez BTCS é estável se $k = O(h)$

(8) Determine os erros de truncamento dos métodos Lax-Wendroff, Lax-Friedrichs, Leap-Frog, FTCS, Upwind.

(9) Determine o lugar geométrico onde estão presentes os autovalores da matriz kA_h obtida usando o métodos das linhas para resolver $u_t + au_x$ com Lax-Wendroff, Lax-Friedrichs, Leap-Frog, FTCS, Upwind (com $a > 0$), Upwind (com $a < 0$).

(10) Porque FTCS e Leap-Frog não são muitos utilizados no resolver problemas hiperbólicos do tipo.

$$\begin{cases} U'(t) + AU_x(t)) = 0, & U(t) \in \mathbb{R}^n \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

(11) Observando a região de estabilidade de Forward Euler porque podemos dizer que FTCS é convergente mas é incondicionalmente instável absolutamente para o problema (Ex0.0a)?

(12) Determine a condição de estabilidade para os métodos Upwind e Beam-Warming aplicado a equação de advecção $u_t + au_x = 0$.

(13) Determine a condição de estabilidade para os métodos Upwind aplicado a equação hiperbólica $u_t + au_x = 3$.

(14) Define a condição CFL para problemas hiperbólicos escalares e vetoriais (sistemas hiperbólicos)

(15) Determine as caraterísticas do problema hiperbólico

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(x,0) = \eta(x) \end{cases}$$

(16) Defina a dissipação e a dispersão de uma onda, usando a sua expansão em Serie de Fourier.

(17) Usando a análise de Von-Neumann desenhar o fator de amplificação G em função do numero da onda considerado dos métodos Upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, FTCS para resolver a equação de advecção $u_t+au_x = 0$. Determine e desenha também o erro de fase Φ/Φ_e Em cada caso dizer quando o método é dissipativo, instável, e dispersivo com leading phase error (frequências maiores tem velocidade maior) ou com lagging phase error (frequências maiores tem velocidade menor).