Outline

Condicionamento

No caso de um sistema linear de equações $Ax = b$, diz-se que o mesmo é mal-condicionado se uma pequena alteração na matriz A ou no vetor b gera uma grande alteração no vetor solução x.

EXEMPLO 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix}$$

cuja solução é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo uma pequena alteração:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{pmatrix}$$

e a solução muda para:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.999 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Ou então mexendo levemente na matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1.001 & 2.001 \\ 2.001 & 3.998 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix}$$

e a solução se torna:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.989 \\ -1.497 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

EXEMPLO 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

cuja solução é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo uma pequena alteração do lado direito:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.001 \end{pmatrix}$$

e a solução muda para:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Ou então mexendo levemente na matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1.001 & 2.001 \\ 2.001 & 3.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

e a solução se torna:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.003 \\ 0.997 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Um sistema mal-condicionado não é confiável para uma solução numérica

Para estimar o número de dígitos significativos em que podemos confiar, devemos definir o conceito de **condição da matriz**, que será usado em conjunto com o ϵ da máquina

Toda matriz inversível tem um número de condição

Utiliza o conceito de **norma** de uma matriz

Condicionamento

Norma é um escalar definido para todas as matrizes e que é sempre positivo, exceto para a matriz nula, quando é 0

Uma norma típica para uma matriz $m \times n$ é a **norma linha**

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

EXEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \|A\|_\infty =?$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|1|+|-3|+|4|, |2|+|2|+|5|, |6|+|3|+|-1|\} = \max\{8, 9, 10\} = 1($$

Condicionamento

Voltando agora ao nosso sistema mal-condicionado e denotando-o na forma $AX = C$, tal que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix}$$

Calculando as normas:

$$\|A\|_\infty = 5.999 \qquad \|X\|_\infty = 2 \qquad \|C\|_\infty = 7.999$$

Agora com uma leve alteração no lado direito:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} -3.999 \\ 4.000 \end{pmatrix} C' = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Calculamos agora a variação no vetor do lado direito e no vetor solução:

$$\Delta C = C' - C = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ -0.001 \end{pmatrix}$$

$$\Delta X = X' - X = \begin{pmatrix} -3.999 \\ 4.000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.999 \\ 3.000 \end{pmatrix}$$

Consequentemente:

$$\|\Delta C\|_\infty = 0.001 \qquad \|\Delta X\|_\infty = 5.999$$

Ou ainda, em termos de diferença relativa:

$$\frac{\|\Delta C\|_\infty}{\|C\|_\infty} = \frac{0.001}{7.999} = 1.25 \times 10^{-4} \qquad \frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{5.999}{2} = 2.9995$$

Repare como uma variação tão pequena em C reflete em mudança várias ordens de grandeza maior em X!!!

Condicionamento

De fato, se compararmos:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty / \|X\|_\infty}{\|\Delta C\|_\infty / \|C\|_\infty} = \frac{2.9995}{1.25 \times 10^{-4}} = 23996$$

Agora, repetindo as contas para o sistema bem-condicionado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calculando as normas:

$$\|A\|_\infty = 5 \qquad \|X\|_\infty = 2 \qquad \|C\|_\infty = 7$$

Agora com uma leve alteração no lado direito:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 1.001 \end{pmatrix} C' = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.001 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Calculamos agora a variação no vetor do lado direito e no vetor solução:

$$\Delta C = C' - C = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.001 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\Delta X = X' - X = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 1.001 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

Consequentemente:

$$\|\Delta C\|_\infty = 0.001 \qquad \|\Delta X\|_\infty = 0.001$$

Ou ainda, em termos de diferença relativa:

$$\frac{\|\Delta C\|_\infty}{\|C\|_\infty} = \frac{0.001}{7} = 1.4286 \times 10^{-4} \qquad \frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{0.001}{2} = 0.0005$$

Condicionamento

Desta vez, se compararmos:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty / \|X\|_\infty}{\|\Delta C\|_\infty / \|C\|_\infty} = \frac{0.0005}{1.4286 \times 10^{-4}} \approx 3.5$$

Pergunta: Existe alguma relação geral entre

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \text{ e } \frac{\|\Delta C\|}{\|C\|} \text{ ou entre } \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \text{ e } \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \text{ ?}$$

Se sim, esta relação poderia identificar sistemas bem e mal-condicionados e quantificar o grau de condicinamento dos sitemas? E indo além, permitiria estimar o número de dígitos confiáveis na solução numérica?

A resposta é SIM!!!

Condicionamento

E a relação é dada por:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta C\|}{\|C\|}$$

e

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

O fator de amplificação é portanto o produto $\|A\|\|A^{-1}\|$

Este número é chamado de **condição** da matriz: $Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

É desejável que $Cond(A) \approx 1$

Condicionamento

Além disso, $Cond(A)$ em conjunto com ϵ_{maq} permite estimar o número de dígitos significativos corretos na solução numérica, dado que:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \frac{\|X' - X\|}{\|X\|} \leq Cond(A)\frac{\|\Delta C\|}{\|C\|}$$

Mesmo que não haja variação em C fornecido à máquina ($C = C'$), podemos ainda ter um erro de arredondamento cujo méximo é ϵ_{maq} e portanto não temos como garantir que um erro relativo menor do que $Cond(A) \times \epsilon_{maq}$ ocorra

Por isso que na solução de $AX = C$ dizemos que podemos ter m dígitos de confiança, tal que m é o maior inteiro satisfazendo
$\frac{1}{2} \times 10^{-m} > Cond(A) \times \epsilon_{maq}$

Condicionamento

EXEMPLO 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -3999 & 2000 \\ 2000 & -1000 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 5.999 \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 5999$$

$$Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \approx 35988$$

Vamos assumir 24 dígitos na mantissa e no padrão iso C então teremos $\epsilon_{maq} = 2^{-(24-1)} = 0.119209 \times 10^{-6}$

$Cond(A)\epsilon_{maq} = 0.429 \times 10^{-2}$ (2 dígitos de confiança!)

Condicionamento

EXEMPLO 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 5 \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 5$$

$$Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 25$$

$Cond(A)\epsilon_{maq} = 0.298023 \times 10^{-5}$ (5 dígitos de confiança!)

Propriedades da norma de matrizes

- Para qualquer matriz A, $\|A\| \geq 0$
- Dada uma matriz A e um escalar k, $\|kA\| = k\|A\|$
- Para duas matrizes A e B de mesma ordem, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- Para duas matrizes A e B que podem ser multiplicadas, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Demonstração da relação de normas e condicionamento

Proposição: $\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

Prova: Começamos com $AX = C$. Se A é alterado para A', X é alterado para X' e o sistema continua válido:
$A'X' = C$

Juntando as duas equações acima temos $AX = A'X'$

Mas sabemos também que
$\Delta A = A' - A$ e $\Delta X = X' - X$
Portanto, $AX = (A + \Delta A)(X + \Delta X)$

Demonstração da relação de normas e condicionamento

Expandindo a última equação:
$AX = (A + \Delta A)(X + \Delta X)$
$AX = AX + A\Delta X + \Delta AX + \Delta A\Delta X$
Subtraindo AX dos dois lados temos:
$0 = A\Delta X + \Delta AX + \Delta A\Delta X$
$-A\Delta X = \Delta A(X + \Delta X)$
$\Delta X = -A^{-1}\Delta A(X + \Delta X)$
Lançando mão da propriedade do produto das normas:
$\|\Delta X\| \leq \|-A^{-1}\|\|\Delta A\|\|X + \Delta X\|$
Agora, multiplicamos ambos os lados por $\|X + \Delta X\|^{-1}$ enquanto que no lado direito multiplicamos em cima e embaixo por $\|A\|$:
$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$