MS211, Cálculo Numérico, Turma B
Segundo Semestre de 2019, UNICAMP

Prova 2

Pode usar a calculadora. Aproxime os resultados com até 4 dígitos significativos. Cada questão $(1),(2),(3)$ **tem peso** $\frac{1}{3}$**.**

(1) Considere os seguintes valores

x	-1	0	1	1.5	2
y = f(x)	4	2	1	0	-1

- Determinar a melhor função do tipo $\Phi(x) = ax^3 + b$ que passa perto destes pontos.
- Achar o polinômio de segundo grau que passa pelos pontos $(x, f(x))$ com $x = -1, 0, 1$. De uma estimativa do erro de interpolação em 0.5 .

(2)
- Achar uma aproximação da seguinte integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x)dx$ usando a Formula de Simpson repetida (duas vezes).
- Sabendo que o erro de integração de Simpson aplicado a $\int_a^b f(x)dx$ é $E = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5$, achar o erro de integração da formula de Simpson repetida 2 vezes. De que ordem é este erro?

(3) Considere o seguinte problema diferencial em $[1, +\infty[$

$$\begin{cases} 2y'x - y + x = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

- Verifique se este problema é bem posto.
- Achar a solução em $x = 3$ com o método de Euler Avançado e com os Trapézios (Crank-Nicolson).
- Determinar o erro de Truncamento de Euler Avançado no caso geral $y' = f(x, y(x))$, e depois no caso do problema.
- De que ordem é o método de Euler Avançado? Motive a sua resposta.
- Como se pode achar numericamente a ordem do método?

Fórmulas úteis:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \text{ onde } L_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x_k - x_j)},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$\left| f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}, \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

onde $x, \xi_x \in (x_0, x_n)$.

$$I \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\},$$

$$I \approx \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\},$$

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ , \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

$$|E| \leq \frac{h^2}{2} M_1, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]}\ |f'(x)|$$

$$|E| \leq \frac{h^3}{12} M_2,\ \ M_2 = \max_{x\in[a,b]}\ |f''(x)|$$

$$|E| \leq \frac{h^3}{24} M_2,\ \ M_2 = \max_{x\in[a,b]}\ |f''(x)|$$

$$|E| \leq \frac{h^5}{90} M_4,\ \ M_4 = \max_{x\in[a,b]}\ |f^{(IV)}(x)|,\ h = \frac{b-a}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))],$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y'(x_i) \approx -\frac{3y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{2h}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$