MS211 - Gabarito Prova 2 - Giuseppe

PED - Lucas - Novembro 2019

1 Exercício 1

1.1 Ajuste de curva.

x	-1	0	1	1.5	2
y	4	2	1	0	-1

Tab. 1: Dados

Devemos encontrar α e β e ajustar os pontos da 2 considerando:

$$y \approx \bar{y} = \alpha + \beta x^3 = \alpha * g_1 + \beta * g_2$$

Logo, temos $g_1 = 1$, e $g_1 = x^3$. Sendo assim temos o seguinte sistema linear Ax = y, sendo que:Ajuste de curva.

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ g_1 & g_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & x^3 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3.375 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos por equações normais, $A^t A x = A^t y$:

$$A^t A x = \begin{bmatrix} 5 & 11.375 \\ 11.375 & 73.3906 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} = A^t y$$

E a solução é:

$$y \approx \bar{y} = 2.28864 - 0.47852 x^3$$

.

1.2 Polinômio interpolador

Encontrar o polinômio $p(0.5)$ utilizando:

x	-1	0	1
y	4	2	1

Tab. 2: Dados

Como precisamos calcular o erro a melhor opção seria usar o método de Newton para polinômio interpolador, umas vez que calculamos as diferenças finitas e usaremos elas para estimar o erro.

Como temos 3 pontos o polinômio será de grau 2 e usaremos mais um ponto para obter a diferença finita de ordem 3 e aproximar a derivada no erro.

x	(y) ordem 0	ordem 1	ordem 2	ordem 3
-1	**4**	**-2**	**1/2**	-7/15
0	2	-1	-2/3	
1	1	-2		
1.5	0			

Tab. 3: Fórmula/Teoria na página 220 do livro da Márcia.

x	(y) ordem 0	ordem 1	ordem 2	ordem 3
-1	**4**	**-2**	**1/2**	-1/3
0	2	-1	-1/2	
1	1	-2		
2	-1			

Tab. 4: Fórmula/Teoria na página 220 do livro da Márcia.

O maior valor em módulo das diferenças é 7/15 e o erro é dado por:

$$E(0.5) = |\bigcup_{i=1}^{n}(x - x_0)| * |\text{max diferença finita de ordem } n+1|$$
$$E(0.5) = |(-1 - 0.5)(0 - 0.5)(1 - 0.5)| * (7/15) = 0.1750$$

e o polinômio ($x_0 = 0.5$):

$$p(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] = 0.5x^2 - 1.5x + 2$$

2 Exercício 2

2.1 Aproximação de integral - Método de Simpson

$$I = \int_0^\pi sin^2(x)dx$$

Precisamos aplicar a fórmula duas vezes e por isso precisamos dividir o intervalo em duas partes:

x_0	x_1	x_2
0	$\pi/2$	π

Tab. 5: Pontos

Na fórmula usamos o ponto médio do intervalo, logo teremos que usar os seguintes valores:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/4$	π
$sin^2(x)$	0	1/2	0	1/2	0

Tab. 6: Pontos e valor da função

A fórmula de Simpson entre $[a, b]$ é dada por:

$$I_n = \frac{(a-b)}{6} * \left(f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Assim temos que aplicar a fórmula em dois intervalos e somá-los:

$$I \approx I_n = I_{[0;\pi/2]} + I_{[\pi/2;\pi]} = \frac{\pi}{2}$$

2.2 Ordem do erro

$$Erro = \frac{1}{2880}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2))(\pi/2)^5 = \frac{2}{2880} f^{(4)}(\xi)(\pi/2)^5$$

A ordem do do erro é 4.
Erro da fórmula repetida N vezes de Simpson é:

$$Erro = \frac{N}{2880} f^{(4)}(\xi) \frac{(b-a)^5}{N^5} = (b-a) f^{(4)}(\xi) \frac{(b-a)^4}{N^4} = (b-a) f^{(4)}(\xi) \tilde{h}^4$$

com $\tilde{h} = \dfrac{(b-a)}{N}$.

3 Exercício 3

3.1 P.V.I.

O problema tem uma condição inicial, é do tipo :

$$y' = f(x, y(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{y+1}{x} - 1\right)$$

f é limitada em $[1, +\infty[$ e é Lipschitz continua respeito y com constante de Lipschitz:

$$L = \max_{x \in [1, +\infty]} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = \frac{1}{2}$$

Logo, o problema é bem posto.

Euler Avançado: $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h * f(x_n, y_n)$

Crank - Nicolson: $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \dfrac{h}{2} * (f(x_n, y_n + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

Queremos escolher o tamanho de h, como queremos calcular $y(3)$ e $x_0 = 1$ podemos escolher $h = 2$ e aplicar a fórmula uma única vez ou usar $h = 1$ e aplicar dois passos.

Com $(h = 1)$ e Euler Avançado $(x_{n+1} = x_n + h$ e $x_0 = 1)$:

$$y(2) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$y(3) = \frac{13}{8} = 1,625$$

Com $(h = 1)$ e Crank Nicolson $(x_{n+1} = x_n + h$ e $x_0 = 1)$:

$$y(2) = \frac{9}{7} = 1,28571$$

$$y(3) = \frac{13}{8} = 1,25971$$

Com ($h = 2$) e Euler Avançado ($x_{n+1} = x_n + h$ e $x_0 = 1$):

$$y(3) = 2$$

Com ($h = 1$) e Crank Nicolson ($x_{n+1} = x_n + h$ e $x_0 = 1$):

$$y(3) = \frac{7}{5} = 1,4$$

3.2 Erro de Truncamento

Erro de Truncamento de Euler é

$$Th = (h^2)/2y''(x_n) + O(h^3)$$

O método é de ordem 1. Porque:

$$Erro = \frac{Th}{L * h} e^{L(x_{n+1} - x_0)} = O(h)$$

Para obter a ordem do método aplicamos o método de Euler para vários h para aproximar um y(x)

$$h, h/2, h/4 \text{ se os erros são } E, E/2, E/4$$

então o método tem erro do tipo $E = ch$, ou seja, é um método de ordem 1. Para obter uma aproximação do erro E, pode achar a solução numérica $\tilde{y}(3)$ usando um h muito pequeno. Depois pode usar $E = |y_h(3) - \tilde{y}(3)|$ onde $y_h(3)$ é a solução numérica achada no ponto $x = 3$ com espaçamento h.