MS211 - Gabarito Prova 1 - Giuseppe

PED - Lucas - Novembro 2019

1 Exercício 1

1.1

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Para que a função tenha somente um único zero, precisamos que:

i $f(a) * f(b) < 0$;

ii $f'(x) > 0 \ (< 0), \forall x \in [a, b]$.

1.2

$$|b_k - a_k| = \frac{(b-a)}{2^k} < \varepsilon$$

Isolando 2^k e aplicando o logs:

$$log(2^{-k}) < log(\frac{\varepsilon}{b-a})$$

usando as propriedades de logaritmo:

$$-k < \frac{log(\varepsilon) - log(b-a)}{log(2)}$$

$$k > \frac{log(b-a) - \log(\varepsilon)}{log(2)}$$

Sendo que $\varepsilon = 10^{-2}$ obtemos que k tem de ser maior de $\frac{log(b-a)+2}{log(2)}$.

1.3 Bisseção e Falsa posição

Bisseção:

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Falsa posição:

$$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

Teste para atualização do intervalo:
if $f(a) * f(x_k) < 0$
$b = x_k$;
else

$a = x_k$;
end

Bisseção: Primeira iteração:

$$I = [-5; \quad 0]$$

$$f(a) = 18$$

$$f(b) = -2$$

$$x_1 = -2.5$$

$$f(a) * f(x_1) = 31.5 > 0$$

$$a = x_1$$

Primeira iteração:

$$I = [-2.5; \quad 0]$$

$$f(a) = 1.75$$

$$f(b) = -2$$

$$x_1 = -1.25$$

$$f(a) * f(x_2) = -2.953 < 0$$

$$b = x_2$$

Falsa posição: Primeira iteração:

$$I = [-5; \quad 0]$$

$$f(a) = 18$$

$$f(b) = -2$$

$$x_1 = -0.5$$

$$f(a) * f(x_1) = -36 < 0$$

$$b = x_1$$

Primeira iteração:

$$I = [-2.5; \quad 0]$$

$$f(a) = 18$$

$$f(b) = -2.25$$

$$x_1 = -1$$

$$f(a) * f(x_2) = -40.25 < 0$$

$$b = x_2$$

2 Exercício 2

Resolver os sistema Ax = b pela eliminação de Gauss com pivotamento parcial:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = -2 \\ 30x + 10z = 20 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ ,30 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 20 \end{bmatrix}$$

.,

Após o pivotamento parcial teremos:

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 3.\bar{3} \\ 0 & 0 & 1.\bar{7} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 20 \\ -3.\bar{3} \\ -1.\bar{7} \end{bmatrix}$$

.

sendo que:

$$m_{12} = 0.\bar{6},\ m_{13} = 0.0\bar{3} \text{ e } m_{23} = -0.\bar{3}$$

e

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3 Exercício 3

Gauss-Jacobi: Página 155 do livro da Márcia.

Gauss-Seidel: Página 161 do livro da Márcia.

4 Exercício 4

Considere o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} (x-1)^2 - y^2 = 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases}$$

Logo:

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x-1)^2 - y^2 - 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

4.1 Quantas soluções tem este problema ?

Como temos a equação de uma circunferência e uma hipérbole, temos dois pontos como solução.

4.2 Resolver aplicando o método de Newton

Calculamos a Jacobiana do sistema:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2 & 2y \\ x & -2y \end{bmatrix}$$

Passos: Dado X_0
Calculamos s_k resolvendo o sistema linear:

$$J(X_k)s_k = -F(X_k)$$

$$X_{k+1} = X_k + s_k$$

Sendo assim, para a primeira iteração teremos:

$$X_0 = [2 \quad 1]$$

Então:

$$J(2, 1) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$F(2, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_0 = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.875 \\ 0.875 \end{bmatrix}$$