MS211, Cálculo Numérico, Turma B
Segundo Semestre de 2019, UNICAMP

Exame

Pode usar a calculadora.
Aproxime os resultados com até 4 dígitos significativos. Primeira questão pesa 40% e a segunda 60% na nota do exame

(1) (40%)

- Descrever geometricamente os métodos da Secante e De Newton.
- Quando um método do ponto fixo converge?
- Provar que ambos os métodos da Secante e de Newton são do ponto fixo.
- Considere o problema $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ em $[-\pi, \pi]$. Quantos zeros tem este problema? Achar a aproximação de um zero usando o método de Newton e o método da Secante. Qual método é superior entre os dois? Motive a sua resposta.

(2) (60%)
Considere a seguinte equação diferencial

$$y^{(k)} - 3yx + \sin x = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Para construir um problema de valore inicial, com ponto inicial $x_0 = -1$, quais e quantas condições podem ser adicionadas a equação?
- Achar a solução do problema diferencial

$$\begin{cases} y' - 3yx + \sin x = 0 \\ y(-1) = 2; \end{cases}$$

  em $x = 1$ usando um método de segunda ordem.
- Achar a solução do problema diferencial

$$\begin{cases} y'' - 3yx + \sin x = 0 \\ y(-1) = 2; \\ y(2) = 0; \end{cases}$$

  em $x = 1$ usando um método de segunda ordem.
- Como se pode achar numericamente a ordem dos métodos implementados nos dois itens anteriores? E teoricamente?

Fórmulas úteis:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \text{ onde } L_k(x) = \frac{\displaystyle\prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\displaystyle\prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x_k - x_j)},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\ldots,x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$\left| f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \le \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}, \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

onde $x, \xi_x \in (x_0, x_n)$.

$$I \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\},$$

$$I \approx \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\},$$

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ , \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

$$|E| \le \frac{h^2}{2} M_1, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]}\ |f'(x)|$$

$$|E| \le \frac{h^3}{12} M_2,\ M_2 = \max_{x\in[a,b]}\ |f''(x)|$$

$$|E| \le \frac{h^3}{24} M_2,\ M_2 = \max_{x\in[a,b]}\ |f''(x)|$$

$$|E| \le \frac{h^5}{90} M_4,\ M_4 = \max_{x\in[a,b]}\ |f^{(IV)}(x)|,\ h = \frac{b-a}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))],$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y'(x_i) \approx -\frac{3y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{2h}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$