MS211, Cálculo Numérico, Turma C
Segundo Semestre 2018, IMECC-UNICAMP

Prova 1 - Resolução

(1) (Peso 1 ponto)

Calcule a operação $(x+y)*z$ na aritmética finita $FP\,(10,3,1)$ utilizando arredondamento e os valores: $x = 3,14$, $y = 2,56610^{-3}$ e $z = 100,2$.

Resolução: Os valores de x, y e z são armazenados no FP acima como $\bar{x} = 0.314\times 10^1$, $\bar{y} = 0.257\times 10^{-2}$ e $\bar{z} = 0.100\times 10^3$, respectivamente.

Agora,

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \bar{x}+\bar{y}\\ &= (0.314\times 10^1)+(0.257\times 10^{-2})\\ &= (0.314+0.000257)\times 10^1\\ &= 0.314257\times 10^1\\ &= 0.314\times 10^1,\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\bar{w}*\bar{z} &= (0.314\times 10^1)*(0.100\times 10^3)\\ &= 0.0314\times 10^4\\ &= 0.314\times 10^3,\end{aligned}$$

que é a solução da operação no $FP(10,3,1)$.

(2) (Peso 3 pontos)

(i) Demonstrar que o método iterativo genérico $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ usado para encontrar uma raiz x^* de $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ converge se x_0 está no intervalo I tal que $|\varphi'(x)|\le M < 1, \forall x\in I$.
Para facilitar a demonstração prove antes que $\left|e^{(k+1)}\right| \le M\left|e^{(k)}\right|$, onde $e^{(k)} = x_k - x^*$.
Solução: Note que

$$x_{k+1}-x^* = \varphi(x_k)-x^* = \varphi(x_k)-\varphi(x^*).$$

Pelo teorema do valor médio, existe c_k entre x_k e x^* tal que

$$x_{k+1}-x^* = \varphi'(c_k)(x_k-x^*).$$

Isso implica que

$$|e^{k+1}| = |\varphi'(c_k)||e_k| \le M|e^k|$$

para $0 \leq |\varphi'(c_k)| \leq M$. Logo,

$$
\begin{aligned}
|e^{k+1}| &\leq M|e^k| \\
&\leq M^2|e^{k-1}| \\
&\vdots \\
&\leq M^k|e^0|.
\end{aligned}
$$

Tomando o limite em ambos os lados, obtemos

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |e^{k+1}| \leq |e^0| \lim_{k\to\infty} M^k = 0$$

se assumirmos $M < 1$ (hipótese). Assim, pelo Teorema do confronto (sanduiche), temos que $|e^{k+1}| = 0$ e, portanto, $x_{k+1} = x^*$.

(ii) Escrever o algoritmo do método da secante.

Solução: Considere o algoritmo descrito na sequência:

Algoritmo 1 Método da Secante

Entrada: (1) Aproximações iniciais x_0 e x_1; (2) Tolerâncias ϵ_1 e ϵ_2; (3) Número máximo de iterações $Itmax$;

Saída: Aproximação $\bar{x}$ da raiz x^*;

```
início
    se |f(x_0)| < ϵ_1 então
        x̄ ← x_0;
        término;
    fim
    se |f(x_1)| < ϵ_1 ou |x_1 − x_0| < ϵ_2 então
        x̄ ← x_1;
        término;
    fim
    para k de 1 até Itmax faça
        x_2 = x_1 − f(x_1)/(f(x_1) − f(x_0)) (x_1 − x_0) ;
        se |f(x_2)| < ϵ_1 ou |x_2 − x_1| < ϵ_2 então
            x̄ ← x_2;
            término
        fim
        x_0 = x_1;
        x_1 = x_2;
    fim
fim
```

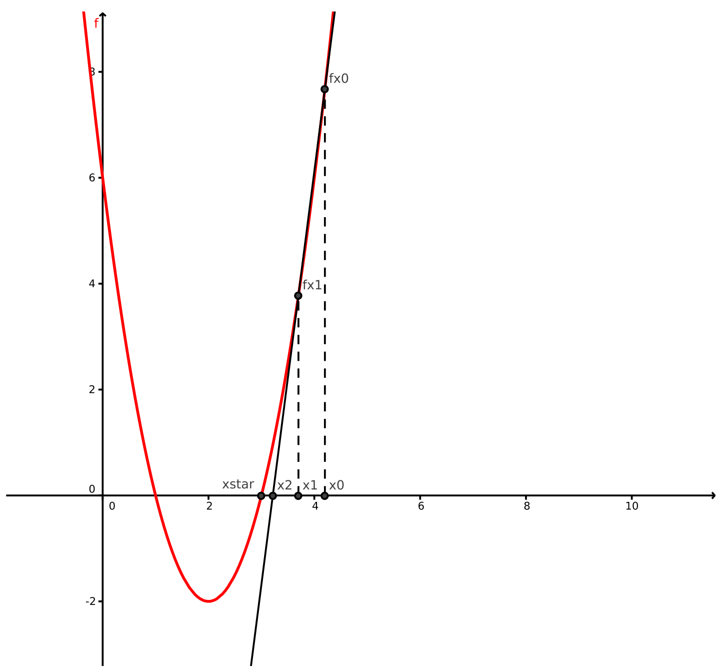
(iii) Descrever graficamente o método da secante quando aplicado no problema em encontrar a maior raiz de $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, denotada por x^*. Implemente numericamente e graficamente dois passos deste método para aproximar a raiz x^*.

Solução: Sabemos que a maior raiz de $f(x)$ é $x^* = 3$. Vamos aplicar o método da secante para determinar x^*. Começamos com duas aproximações iniciais, a saber, $x_0 = 4.2$ e $x_1 = 3.7$.

Para $k = 1$ temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0) \\ &= 3.70 - \frac{3.78}{3.78 - 7.68}(3.70 - 4.20) \\ &= 3.21538. \end{aligned}$$

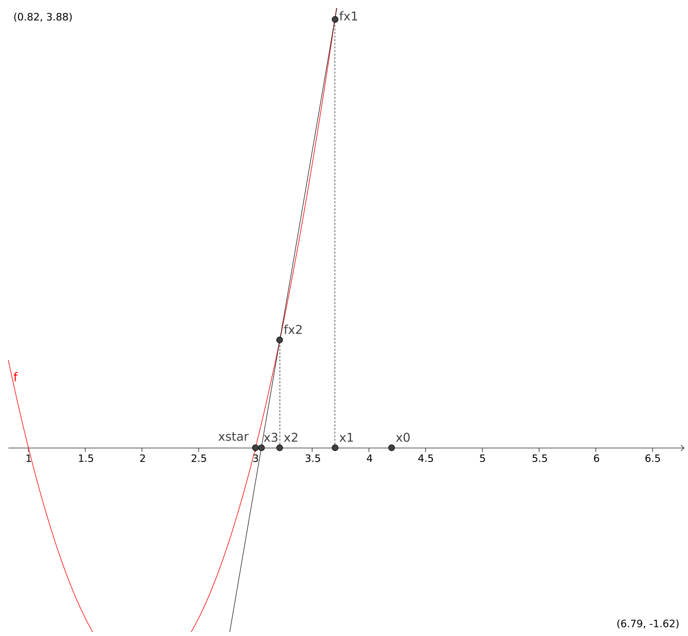
Graficamente,



Para $k = 2$ temos:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1) \\ &= 3.21538 - \frac{0.95432}{0.95432 - 3.78}(3.21538 - 3.7) \\ &= 3.05171. \end{aligned}$$

Graficamente,



(3) (Peso 6 pontos)

(i) Implemente um passo de eliminação direta para resolver o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 4x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & -10^3 x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ x_1 & +7x_2 & -5x_3 & = & -1 \end{array} \right. \tag{1}$$

utlizando as estratégias sem pivotamento, com pivotamento parcial e com pivotamento completo. Explicar qual são as vantagens das estratégias de pivoteamento para resolver sistemas lineares.

Solução: Vamos escrever o sistema acima na forma matricial $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, onde

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & | & 1 \\ -2 & -1000 & -3 & | & 0 \\ 1 & 7 & -5 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Um passo da eliminação direta utilizando a estratégia sem pivotamento:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \sim \begin{pmatrix} [4.0] & -1.0 & 1.0 & | & 1.0 \\ 0 & 1000.5 & 2.5 & | & -0.5 \\ 0 & -7.25 & 5.25 & | & 1.25 \end{pmatrix}$$

Um passo da eliminação direta utilizando a estratégia sem pivotamento parcial:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \sim \begin{pmatrix} [4.0] & -1.0 & 1.0 & | & 1.0 \\ 0 & 1000.5 & 2.5 & | & -0.5 \\ 0 & -7.25 & 5.25 & | & 1.25 \end{pmatrix}$$

Um passo da eliminação direta utilizando a estratégia sem pivotamento total:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \quad & \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & [-1000] & -3 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{array}\right) \\
& \sim (l_1 \leftrightarrow l_2) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & [-1000] & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{array}\right) \\
& \sim (c_1 \leftrightarrow c_2) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} [-1000] & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right) \\
& \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} [-1000.0] & -2.0 & -3.0 & 0.0 \\ 0 & -4.002 & -1.003 & -1 \\ 0 & 0.986 & -5.021 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Quando escolhemos o maior elemento em módulo, da coluna (pivotamento parcial) ou do restante da matriz (pivotamento total), fazemos com que os multiplicadores estejam (em módulo) entre 0 e 1. Isso evita que haja ampliação de erros de arredondamento. Contudo, o método de pivotamento parcial, em especial o de pivotamento total, exige que seja feito uma varredura à procura dos maiores elementos em módulo, e após isso, uma troca de linhas (ou também de colunas no caso do total). Isso acarreta num custo computacional mais elevado quando comparado à estratégia sem pivotamento.

(ii) Determine a matriz de iteração G_J do método iterativo de Jacobi associado ao sistema (1) acima. Implemente um passo do método de Jacobi partindo da iteração $x^{(0)} = (1,\ 1,\ 1)^T$. Podemos afirmar que o método iterativo de Jacobi converge? Motive a sua resposta.

Solução: Vamos obter a matriz de iteração $\boldsymbol{G}_J$ do método iterativo de Jacobi. O método iterativo de Jacobi pode ser obtido realizando as seguintes manipulações no sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{Dx} &= -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{G}_J\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\
\Rightarrow \boldsymbol{x}^{k+1} &= \boldsymbol{G}_J\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

onde a matriz de iteração $\boldsymbol{G}$ e o vetor $\boldsymbol{c}$ são respectivamente definidos por

$$\boldsymbol{G} := -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{c} := \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b},$$

sendo $\boldsymbol{D}$ matriz diagonal, $\boldsymbol{L}$ matriz estritamente triangular inferior e $\boldsymbol{U}$ a matriz estritamente triangular superior de $\boldsymbol{A}$.

Uma vez que $\boldsymbol{A}$ é dado por

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -1000 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix},$$

identificamos $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{U}$ por

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_J &= -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) \\ &= \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/4 \\ -2/1000 & 0 & -3/1000 \\ 1/5 & 7/5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/1000 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Vamos aplicar um passo do método de Jacobi partindo da iteração $x^{(0)} = (1,\ 1,\ 1)^T$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(1)} &= \boldsymbol{G}_J\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{c} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/4 \\ -2/1000 & 0 & -3/1000 \\ 1/5 & 7/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 \\ -5/1000 \\ 9/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos afirmar que o método de Jacobi converge? A resposta é sim, podemos. Os autovalores de $\boldsymbol{G}_J$ são $\lambda^1 = -0.0050182+0.2340418i$, $\lambda^2 = -0.0050182-0.2340418i$ e $\lambda^3 = 0.0100364$. Portanto, $|\lambda^i| < 1$.

(iii) Os autovalores da matriz de iteração de Jacobi G_J são aproximadamente
$\lambda_1 = -0,005 + 0,234i$, $\lambda_2 = -0,005 - 0,234i$, $\lambda_3 = 0,01$.
Aqueles da matriz de iteração de Gauss Seidel G_{GS} são aproximadamente
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0,0029, \lambda_3 = -0,0511$.

Usando os autovalores podemos afirmar que o método de Gauss-Seidel e de Jacobi convergem? Qual será o método mais rápido? Motive as suas respostas.

Solução: Ambos os métodos convergem visto que $|\lambda^i| < 1$ tanto para Jacobi quanto para Gauss-Seidel. O método Gauss-Seidel converge mais rápido uma vez que o maior autovalor (em módulo) é menor do que os autovalores da matriz de iteração de Jacobi (verifique!).