MS211, Cálculo Numérico I
Segundo Semestre 2018, IMECC-UNICAMP

Lista de Exercícios 4

(1) Provar que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_0, x_2, x_1]$ para quaisquer x_0, x_1 e x_2. Depois, verifique as igualdades: $f[0, -1, 2] = f[-1, 0, 2] = f[0, 2, -1]$.

Solução: (i) Vamos mostrar a primeira igualdade, isto é, que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2]$. Por definição temos que

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{1}{x_2 - x_0}\{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]\} \\ &= \frac{1}{x_2 - x_0}\left\{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}\right\} \end{aligned}$$

Definimos, por conveniência, que

$$d := (x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)\,(x_1 - x_0).$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{1}{d}\{(x_1 - x_0)\,(f[x_2] - f[x_1]) - (x_2 - x_1)\,(f[x_1] - f[x_0])\} \\ &= \frac{1}{d}\{x_1 f[x_2] - x_0\,(f[x_2] - f[x_1]) - x_2\,(f[x_1] - f[x_0]) - x_1 f[x_0] + 0\} \\ &= \frac{1}{d}\{x_1 f[x_2] - x_0 f[x_2] + x_0 f[x_1] - x_2 f[x_1] + x_2 f[x_0] - x_1 f[x_0] + x_0 f[x_0] - x_0 f[x_0]\} \\ &= \frac{1}{d}\{(x_1 - x_0)\,(f[x_2] - f[x_0]) - (x_2 - x_0)\,(f[x_1] - f[x_0])\} \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left\{\frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}\right\} \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left\{\frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} - \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1}\right\} \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1}\{f[x_0, x_2] - f[x_1, x_0]\} \\ &= f[x_1, x_0, x_2]. \end{aligned}$$

(ii) Similarmente, mostramos que vale a igualdade $f[x_1, x_0, x_2] = f[x_0, x_2, x_1]$. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} f[x_1, x_0, x_2] &= \frac{1}{x_2 - x_1}\{f[x_0, x_2] - f[x_1, x_0]\} \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left\{\frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} - \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1}\right\} \end{aligned}$$

Defina

$$d := (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_0 - x_1).$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
f[x_1, x_0, x_2] &= \frac{1}{d}\{(x_0 - x_1)(f[x_2] - f[x_0]) - (x_2 - x_0)(f[x_0] - f[x_1])\} \\
&= \frac{1}{d}\{x_0 f[x_2] - x_1 f[x_2] + x_1 f[x_0] - x_2 f[x_0] + x_2 f[x_1] - x_0 f[x_1] + 0\} \\
&= \frac{1}{d}\{x_0 f[x_2] - x_1 f[x_2] + x_1 f[x_0] - x_2 f[x_0] + x_2 f[x_1] - x_0 f[x_1] + x_2 f[x_2] - x_2 f[x_2]\} \\
&= \frac{1}{d}\{(x_2 - x_0)(f[x_1] - f[x_2]) + (x_2 - x_1)(f[x_2] - f[x_0])\} \\
&= \frac{1}{x_0 - x_1}\left\{\frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_2 - x_1} + \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0}\right\} \\
&= \frac{1}{x_1 - x_0}\left\{\frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2} - \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0}\right\} \\
&= \frac{1}{x_1 - x_0}\{f[x_2, x_1] - f[x_0, x_2]\} \\
&= f[x_0, x_2, x_1].
\end{aligned}$$

(iii) Podemos verificar que as igualdades $f[0, -1, 2] = f[-1, 0, 2] = f[0, 2, -1]$ são satisfeitas assumindo $x_0 = 0$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$ nos itens (i) e (ii) acima.

(2) Interpolar a função $f(x) = x^3 + x$ entre $[0, 1]$ usando uma reta e uma parábola passando pelos pontos 0.0, 0.5 e 1.0.

a. Determinar a expressão dos polinômios interpolantes (de grau 1 e 2) na forma de Lagrange e de Newton.

b. Verificar que o erro de interpolação $E_n(x)$ no ponto $x = 3/4$ satisfaz a seguinte majoração:

$$|E_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{0 \leq y \leq 1} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$$

e que

$$|E_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{0 \leq y \leq 1} |f^{(n+1)}(y)|}{4(n+1)} h^{n+1}$$

onde h é o espaçamento entre os $n + 1$ nós utilizados.

Solução: (i) Determinar a expressão dos polinômios interpolantes (de grau 1 e 2) na forma de Lagrange e de Newton.

(i.1) Lagrange de grau 1: Podemos avaliar o polinômio interpolante de grau 1 que passando pelos pontos (a) $x_0 = 0.0$ e $x_1 = 0.5$ ou (b) $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1.0$. Vamos escolher o caso (a) por conveniência.

O polinômio interpolador de Lagrange de grau 1 passando pelos pontos $x_0 = 0.0$ e $x_1 = 0.5$ é descrito como

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \\ &= 0L_0(x) + \frac{5}{8}L_1(x) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = 1 - 2x; \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = 2x, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$p_1(x) = \frac{5}{4}x.$$

(i.2) Lagrange de grau 2: O polinômio interpolador de Lagrange de grau 2 é dado por

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= 0L_0(x) + \frac{5}{8}L_1(x) + 2L_2(x) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 2x^2 - 3x + 1; \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -4x^2 + 4x; \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = 2x^2 - x; \end{aligned}$$

e, portanto, nós temos

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{5}{4}(2x^2 - 3x + 1) + 2(2x^2 - x) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

(i.3) Interpolação com o método de Newton. Antes de realizar a interpolação de grau 1 e 2, vamos construir a tabela de diferenças finitas de $f(x)$ nos pontos $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1.0$. A tabela é dada por:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
0.0	0.0		
		$\frac{5}{4}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$		$\frac{3}{2}$
		$\frac{11}{4}$	
1.0	2		

(i.4) Newton de grau 1: Como em (i.1), podemos avaliar o polinômio interpolante de grau 1 que passando pelos pontos (a) $x_0 = 0.0$ e $x_1 = 0.5$ ou (b) $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1.0$. No caso (a), o polinômio de Newton é dado por

$$\begin{aligned} p_1(x) &= d_0 + d_1(x - x_0) \\ &= 0 + \frac{5}{4}x \\ &= \frac{5}{4}x, \end{aligned}$$

exatamente o mesmo polinômio obtido em (i.1). Enquanto que, no caso (b), o polinômio de Newton é descrito por

$$\begin{aligned} p_1^*(x) &= d_0 + d_1(x - x_1) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{11}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{11}{4}x - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(i.5) Newton de grau 2: O polinômio interpolante de Newton de grau 2 é dado por

$$\begin{aligned} p_2(x) &= d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= [d_0 + d_1(x - x_0)] + d_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= p_1(x) + d_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}x(2x - 1) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \end{aligned}$$

assim como obtido em (i.2).

Agora, vamos verificar que o erro de interpolação $E_n(x)$ no ponto $x = 3/4$ satisfaz a seguinte majoração:

$$|E_n^*(x)| \leq \frac{\max\limits_{0 \leq y \leq 1} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$$

e que

$$|E_n^{**}(x)| \leq \frac{\max\limits_{0 \leq y \leq 1} |f^{(n+1)}(y)|}{4(n+1)} h^{n+1}$$

onde h é o espaçamento entre os $n + 1$ nós utilizados.

Vamos fazer essa análise apenas para o polinômio interpolante

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Para o polinômio de grau 1 é semelhante. Notemos que

$$
\begin{aligned}
p_2\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{78}{64};\\
f\left(\frac{3}{4}\right) &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{75}{64},
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
|E| = \left|p_2\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right)\right| = \frac{3}{64}.
$$

Das estimativas dos erros, temos que

$$
|E_2^*(x)| \leq \frac{\max\limits_{0\leq y\leq 1}|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}|x-x_j| = \frac{6}{3!}\left|\left(\frac{3}{4}-0\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-1\right)\right| = \frac{3}{64},
$$

bem como

$$
|E_2^{**}(x)| \leq \frac{\max\limits_{0\leq y\leq 1}|f^{(n+1)}(y)|}{4(n+1)}h^{n+1} = \frac{6}{4(2+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2+1)} = \frac{1}{16}.
$$

Note que, de fato

$$
|E| \leq \frac{3}{64} \quad \text{e} \quad |E| \leq \frac{1}{16} = \frac{4}{64}.
$$

(3) Um experimento físico resulta nos seguintes valores $f(X)$ associados aos dados X:

X	0.0	0.1	0.4	0.7
$f(X)$	2.0	-3.0	1.0	4.0

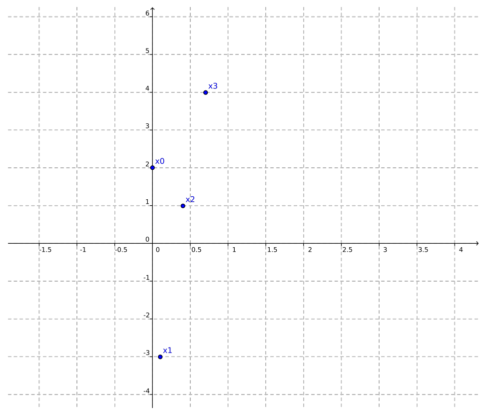
Interpolar os dados da tabela para determinar o valor do experimento em $x = 0.3$, usando um polinômio interpolador $p_2(x)$ e uma spline linear $S_1(x)$.

a. Determinar a expressão analítica do polinômio p_2 e da spline S_1.

b. Supomos que a função f tem derivadas em valor absoluto limitados do mesmo fator M para qualquer ordem até 3. Qual é o interpolador melhor para achar o valor de f em $x = 0.3$? Responda analisando a expressão do erro de interpolação.

c. É possível aproximar o máximo das derivadas de f de ordem k através o máximo das diferenças divididas de ordem k que pode construir a partir dos nós de interpolação. Usando esta propriedade, aproxime o máximo das derivadas segundas e terças em $[0,\ 0.7]$. Compare usando estas aproximações, o erros obtido da interpolação com a spline S_1 e com o polinômio p_2. Qual dos dois métodos aproxima melhor o valor $f(0.3)$?

Os pontos descritos são representados abaixo:



Observação (*) Note que, com excessão do primeiro ponto, temos um crescimento quase linear nos dados.

Solução: (i) Determinar p_2: Para determinar p_2 precisamos escolher 3 pontos. Como queremos estimar $f(x)$ em $x = 0.3$ através de p_2, i.e., calcular $p_2(0.3)$, podemos adotar as estratégias:

(i.1) Escolher os 3 pontos mais próximos de $x = 0.3$;

(i.2) Escolher, com base na observação (*) os três pontos à direita.

Faremos uso do polinômio interpolador de Newton dado por

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1),$$

com a tabela de diferenças divididas dada por

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
0.0	2		
		-50	
0.1	-3		475/3
		40/3	
0.4	1		$-50/9$
		10	
0.7	4		

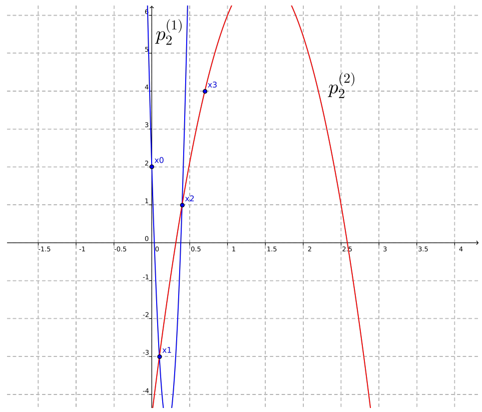
No primeiro caso, teremos um polinômio da forma

$$\begin{aligned} p_2^{(1)}(x) &= 2 - 50x + \frac{475}{3}x(x - 0.1) \\ &= \frac{475}{3}x^2 - \frac{1975}{30}x + 2. \end{aligned}$$

No segundo, o polinômio assume a expressão

$$\begin{aligned} p_2^{(2)}(x) &= -3 + \frac{40}{3}(x - 0.1) - \frac{50}{9}(x - 0.1)(x - 0.4) \\ &= -\frac{50}{9}x^2 + \frac{145}{9}x - \frac{41}{9}. \end{aligned}$$

Veja como fica a interpolação nos dois casos:



Avaliando $p_2^{(1)}(x)$ e $p_2^{(2)}(x)$ em $x = 0.3$ obtemos os valores

$$p_2^{(1)}(0.3) = -3.5 \quad \text{e} \quad p_2^{(2)}(0.3) = -0.22.$$

(ii) Vamos agora determinar $S_1(x)$: Para tal, devemos avaliar

$$s_i(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, 3.$$

Para $i = 1$:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f(x_0)\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= 2(1 - 10x) - 30x \\ &= -50x + 2, \end{aligned}$$

Para $i = 2$:

$$\begin{aligned} s_2(x) &= f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= (4 - 10x) + \frac{10x - 1}{3} \\ &= \frac{40}{3}x - \frac{13}{3}, \end{aligned}$$

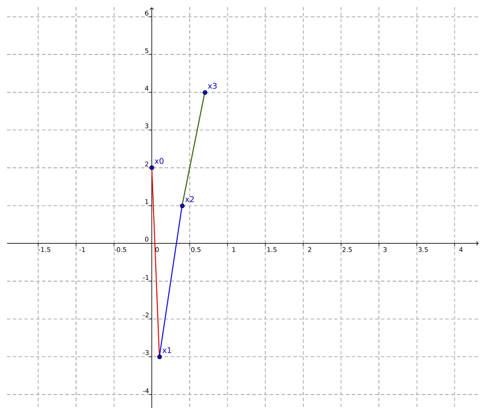
Para $i = 3$:

$$\begin{aligned} s_3(x) &= f(x_2)\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + f(x_3)\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \\ &= \frac{7 - 10x}{3} + \frac{4}{3}(10x - 4) \\ &= 10x - 3. \end{aligned}$$

Assim obtemos

$$S_1(x) = \begin{cases} -50x + 2 & x \in [0, 0.1) \\ \dfrac{40}{3}x - \dfrac{13}{3} & x \in [0.1, 0.4) \\ 10x - 3 & x \in [0.4, 0.7] \end{cases},$$

cuja representação gráfica é dada por



(iii) Falta item (b) e (c).

(4) Prove que $f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$. Use a expressão do polinômio p_{n+1} que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$.

Solução: Considere p_{n+1} o polinômio que interpola f em $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ e outro polinômio p_n que interpola f em $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$. É conhecido que o polinômio interpolador de Newton pode ser escrito como

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x](t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n).$$

Como $p_{n+1}(t)$ interpola f em $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ e assumindo $t = x$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \\ &= p_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n}(x - x_j). \end{aligned}$$

Assim,

$$f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

como desejado.

(5) Aproximar a integral $I(f)$ de $f(x) = x^3 + x$ em $(0, 1)$ usando:

a. Regra do retângulo à esquerda;

b. Regra do retângulo à direita;
c. Regra do trapézio;
d. Regra do ponto médio;
e. Regra de Simpson;

Qual dos métodos acima aproxima melhor $I(f)$? Motive a resposta analisando a expressão dos erros.

Considere agora os métodos repetidos com quatro subdivisões ($\tilde{h} = 1/4$) usando

f. Regra do trapézio (repetidos);
g. Regra de Simpson (repetidos);

Qual destes dois métodos aproxima melhor $I(f)$? Classifique em ordem decrescente de acurácia todos os métodos descritos acima.

Solução: Vamos aproximar a integral

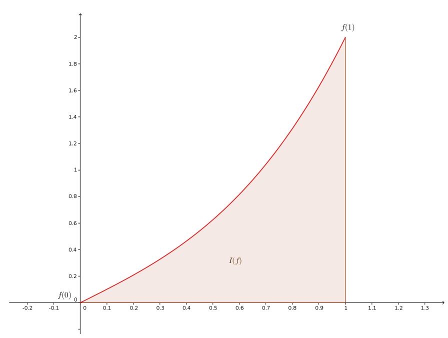
$$I(f) = \int_0^1 x^3 + x \; dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

usando:

a. Regra do retângulo à esquerda;

$$I(f) \approx (b-a)f(a) = (1-0)f(0) = 0.$$

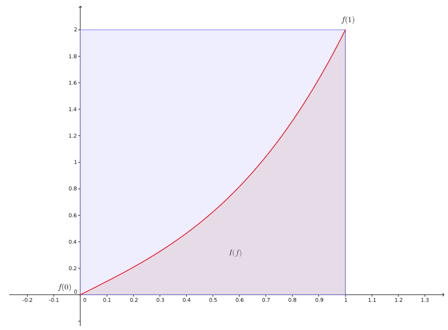
Graficamente, temos



b. Regra do retângulo à direita;

$$I(f) \approx (b-a)f(b) = (1-0)f(1) = 2.$$

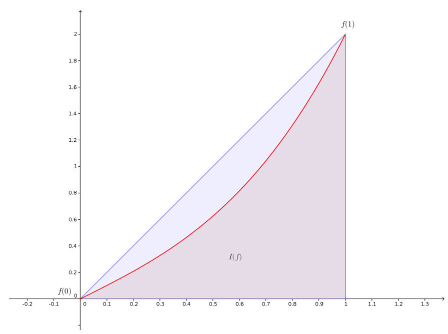
Graficamente,



c. Regra do trapézio;

$$I(f) \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{(1-0)}{2}\left(f(0)+f(1)\right) = 1.$$

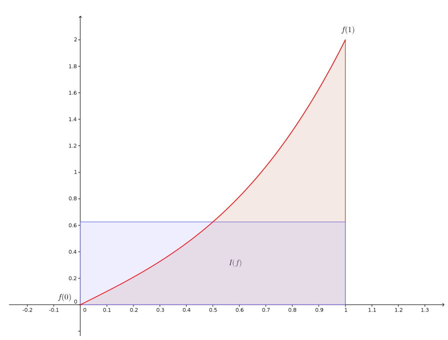
Graficamente,



d. Regra do ponto médio;

$$I(f) \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (1-0)f\left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$$

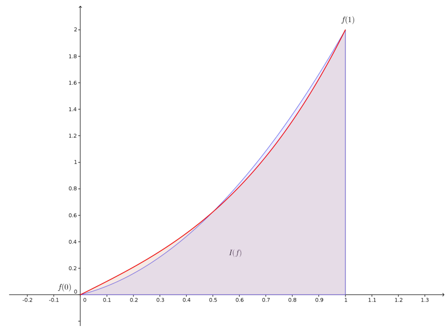
Graficamente,



e. Regra de Simpson;

$$I(f) \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) = \frac{(1-0)}{6}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right) = \frac{3}{4}.$$

Graficamente,



Note que, dos métodos utilizados, a melhor aproximação para $I(f)$ é obtida utilizando regra de Simpson. Vamos obter o erro de cada método mencionado para embasar essa resposta. Vamos usar que o erro de integração $E_h(f) = I(f) - I_h(f) = \int_a^b f - p_n(x)dx = \int_a^b f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]W_n(x)dx$ onde $W_n(x) = \Pi_{i=0}^n (x - x_i)$ tem a seguintes propriedades

p1. Se $W_n(x)$ tem sinal constante em $[a, b]$ (acontece se n é impar ou $n = 0$ com $x_0 = a$, ou $x_0 = b$) então

$$\int_a^b f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]W_n(x)dx = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \eta] \int_a^b W_n(x)dx = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b W_n(x)dx$$

p2. Se $\int_a^b W_n(x)dx = 0$ então escolhendo x_{n+1} tal que $W_{n+1} = W_n(x) * (x - x_{n+1})$ tem sinal constante em $[a, b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]W_n(x)dx &= \int_a^b f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x]W_{n+1}(x)dx = \\ &= \frac{f^{n+2}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b W_{n+1}(x)dx \end{aligned}$$

a. (Erro) Retângulo à esquerda:
Sendo que $E = I(f) - f(a)(b - a) = \int_a^b f(x) - p_0(x)dx$ com $p_0 = f(a)$ o polinomio de grau 0 interpolante f em $x_0 = a$ temos usando a forma do erro de interpolação: $f(x) - p_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x] = (x - x_0)f'(\xi_x)$ com $\xi_x \in [x_0, x]$ então, sabendo que $(x - x_0)$ tem sinal constante vale que $\int_a^b (x - x_0)g(x) = g(\eta) \int_a^b (x - x_0)$ $\forall g$ função contínua (ver também a propriedade p1. em cima) , vale o seguinte: $\exists \xi \in [a, b]$

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b (x - x_0)f'(\xi_x)dx \\ &= f'(\xi) \int_a^b (x - a) \\ &= f'(\xi) \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

A expressão do erro pode ser deduzida também como segue, usando $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
E &= I(f) - f(a)(b-a) \\
&= \int_a^b F'(x)dx - f(a)(b-a) \\
&= F(b) - F(a) - f(a)h \\
&= F(a+h) - F(a) - f(a)h \\
&= F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + \frac{h^3}{3!}F'''(a) + O(h^4) - F(a) - f(a)h \\
&= hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + \frac{h^3}{3!}F'''(a) + O(h^4) - f(a)h \\
&= hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{3!}f''(a) + O(h^4) - f(a)h \\
&= \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{3!}f''(a) + O(h^4) \\
&= O(h^2).
\end{aligned}$$

b. (Erro) Retângulo à direita:
como antes com $x_0 = b$

$$\begin{aligned}
E &= \int_a^b (x-b)f'(\xi_x)dx \\
&= f'(\xi)\int_a^b (x-b) \\
&= -f'(\xi)\frac{h^2}{2}
\end{aligned}$$

c. (Erro) Regra do trapézio;
Sendo que $E = I(f) - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = \int_a^b f(x) - p_1(x)dx$ com $p_1 = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$ o polinomio de grau 1 interpolante f em $x_0 = a$, $x_1 = b$ temos usando a forma do erro de interpolação: $f(x) - p_1(x) = (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x] = (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}$ com $\xi_x \in [a, b]$ então, sabendo que $(x - x_0)(x - x_1)$ tem sinal constante (ver propriedade p1.) e então vale o seguinte: $\exists \xi \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
E &= \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}dx \\
&= \frac{f''(\xi_x)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\
&= \frac{f''(\xi)}{12}h^3
\end{aligned}$$

A expressão do erro pode ser deduzida também como segue, usando $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
E &= I(f) - \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \\
&= F(b) - F(a) - \frac{h}{2}\left(f(a) + f(a+h)\right) \\
&= F(a+h) - F(a) - \frac{h}{2}f(a) - \frac{h}{2}f(a+h) \\
&= F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + \frac{h^3}{6}F'''(a) - F(a) + \\
&\quad -\frac{h}{2}f(a) - \frac{h}{2}f(a) - \frac{h^2}{2}f'(a) - \frac{h^3}{4}f''(a) + O(h^4) \\
&= hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) - \frac{h}{2}f(a) - \frac{h}{2}f(a) - \frac{h^2}{2}f'(a) - \frac{h^3}{4}f''(a) + O(h^4) \\
&= \frac{h^3}{6}f''(a) - \frac{h^3}{4}f''(a) + O(h^4) \\
&= -\frac{h^3}{12}f''(a) + O(h^3) \\
&= O(h^3).
\end{aligned}$$

d. (Erro) Regra do ponto médio;
Seja $c = \frac{a+b}{2}$ o ponto médio. Temos $E = I(f) - f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) - p_0(x)dx$ com $p_0 = f(c)$ o polinomio de grau 0 interpolante f em $x_0 = c$. Temos usando a forma dos erros de interpolação:

$$f(x) - p_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x] = (x - x_0)f'(\xi_x)$$

com $\xi_x \in [x_0, x]$, e então, observando que $\int_a^b (x-c)dx = 0$ vale o seguinte (ver proriedade p2.) :
Consideramos o ponto $x_1 = x_0 = c$ este é tal que $W_1(x) = (x-x_0)(x-x_1) = (x-c)^2$ tem sinal constante então (pela propriedades p1. em cima) : $\exists\xi \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
E &= \int_a^b (x-c)f[c, x]dx \\
&= \int_a^b (x-c)^2 f[c, c, x]dx \\
&= \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-c)^2 dx \\
&= \frac{f''(\xi)}{24}h^3
\end{aligned}$$

A expressão do erro pode ser deduzida também como segue, usando $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
E &= I(f) - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= F(b) - F(a) - hf\left(a + \frac{h}{2}\right) \\
&= F(a+h) - F(a) - hf\left(a + \frac{h}{2}\right) \\
&= F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + \frac{h^3}{6}F'''(a) - F(a) - hf(a) - \frac{h^2}{2}f'(a) - \frac{h^3}{8}f''(a) + O(h^4) \\
&= hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + \frac{h^3}{6}F'''(a) - hf(a) - \frac{h^2}{2}f'(a) - \frac{h^3}{8}f''(a) + O(h^4) \\
&= hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) - hf(a) - \frac{h^2}{2}f'(a) - \frac{h^3}{8}f''(a) + O(h^4) \\
&= \frac{h^3}{6}f''(a) - \frac{h^3}{8}f''(a) + O(h^4) \\
&= \frac{h^3}{24}f''(a) + O(h^4) \\
&= O(h^3).
\end{aligned}$$

e. (Erro) Regra de Simpson;
Seja $c = \frac{a+b}{2}$, e $h = \frac{b-a}{2}$ temos que

$$E = I(f) - \int_a^b p_2(x)dx = I(f) - \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(c)+f(b)) = I(f) - \frac{h}{3}(f(a)+4f(c)+f(b))$$

com $p_2 = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$ o polinomio de grau 2 interpolante f em $x_0 = a$, $x_1 = c$, $x_2 = b$ temos a seguinte forma do erro de interpolação:

$$f(x) - p_2(x) = f[x_0, x_1, x_2, x](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

Observamos que $\int_a^b W_2(x)dx = \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx = 0$, (ver propriedade p2.) se escolhemos $x_3 = x_1 = c$ obtemos que $W_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ tem sinal constante em $[a, b]$ então pelas propriedades em cima vale o seguinte : $\exists \xi \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
E &= \int_a^b W_2(x) f[x_0, x_1, x_2, x]dx \\
&= \int_a^b W_3(x) f[x_0, x_1, x_2, x_3, x]dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b W_3(x)dx \\
&= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5 \\
&= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5
\end{aligned}$$

A expressão do erro pode ser deduzida também como segue, usando $F'(x) = f(x)$.

$$
\begin{aligned}
E &= I(f) - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \\
&= F(b) - F(a) - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \\
&= F(a+h) - F(a) - \frac{h}{6}f(a) - \frac{4h}{6}f\left(a + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{6}f(a+h) \\
&= \text{contas semelhantes} \cdots \\
&= -\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(a) + O(h^6) \\
&= O(h^5).
\end{aligned}
$$

Pelas ordens de aproximação descritas verificamos que, dos métodos apresentados, a regra de Simpson é a que melhor aproxima $I(f)$.

Vamos considerar agora os métodos repetidos com 4 sudivisões $\tilde{h} = 1/4$:

f. Regra do trapézio (repetidos):

$$
\begin{aligned}
I(f) &\approx \frac{\tilde{h}}{2}\left[f(a) + f(\tilde{h})\right] + \frac{\tilde{h}}{2}\left[f(\tilde{h}) + f(2\tilde{h})\right] + \frac{\tilde{h}}{2}\left[f(2\tilde{h}) + f(3\tilde{h})\right] + \frac{\tilde{h}}{2}\left[f(3\tilde{h}) + f(b)\right] \\
&= \frac{\tilde{h}}{2}\left[f(a) + 2f(\tilde{h}) + 2f(2\tilde{h}) + 2f(3\tilde{h}) + f(b)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[0 + 2\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{27}{64} + \frac{3}{4}\right) + 2\right] \\
&= \frac{49}{64} \approx 0.7656
\end{aligned}
$$

g. Regra de Simpson (repetidos):

$$\begin{aligned}
I(f) \quad &\approx \quad \frac{\tilde{h}}{6}\left[f(a)+4f\left(a+\frac{\tilde{h}}{2}\right)+f(\tilde{h})\right]+\frac{\tilde{h}}{6}\left[f(\tilde{h})+4f\left(\tilde{h}+\frac{\tilde{h}}{2}\right)+f(2\tilde{h})\right]+ \\
&\quad +\frac{\tilde{h}}{6}\left[f(2\tilde{h})+4f\left(2\tilde{h}+\frac{\tilde{h}}{2}\right)+f(3\tilde{h})\right]+\frac{\tilde{h}}{6}\left[f(3\tilde{h})+4f\left(3\tilde{h}+\frac{\tilde{h}}{2}\right)+f(b)\right] \\
&= \quad \frac{\tilde{h}}{6}\left[f(a)+4f\left(a+\frac{\tilde{h}}{2}\right)+2f(\tilde{h})+4f\left(\tilde{h}+\frac{\tilde{h}}{2}\right)+2f(2\tilde{h})+4f\left(2\tilde{h}+\frac{\tilde{h}}{2}\right)+\right. \\
&\qquad \left. +2f(3\tilde{h})+4f\left(3\tilde{h}+\frac{\tilde{h}}{2}\right)+f(b)\right] \\
&= \quad \frac{1}{8}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{8}\right)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+4f\left(\frac{3}{8}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{5}{8}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+\right. \\
&\qquad \left. +4f\left(\frac{7}{8}\right)+f(1)\right] \\
&= \quad \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Qual destes dois métodos aproxima melhor $I(f)$? Vamos classificar em ordem decrescente de acurácia todos os métodos descritos acima.

(i) Simpson $O(h^5)$;

(ii) Ponto médio / Trapézio $O(h^3)$;

(iii) Retângulo $O(h^2)$;