MS211, Cálculo Numérico I, Turma C
Segundo Semestre 2018, IMECC-UNICAMP

# Lista de Exercícios 3

(1) O método de Relaxação (SOR) é uma variante do método iterativo de Gauss-Seidel:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] \tag{1}$$

com $0 < \omega < 2$ que é condição necessária pela convergência.

Nota-se que o método de Gauss-Seidel é recuperado para $\omega = 1$. Estes métodos permitem de escolher o $\omega_0$ ótimo (aquele que minimiza o raio espectral da matriz de iteração) para que o método seja o mais rápido respeito aqueles associados à outros $\omega$. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -7 \\ 4 & 5 & -3 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

e o vetor $b = [4\ 6\ \ -2]^T$.

Prove que o método de relaxamento com $\omega_0 = 1.531281$ é mais rápido de Gauss-Seidel por meio de número de iterações. Use a solução teórica do sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ que é $\boldsymbol{x}^* = [1\ 1\ 1]^T$.

**Solução:** A título de curiosidade, o método de relaxamento descrito em (1) pode ser obtido realizando as seguintes manipulações no sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\omega\,(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x} &= \omega\boldsymbol{b} \\
(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{x} + \omega\,(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x} &= \omega\boldsymbol{b} \\
(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})\,\boldsymbol{x} &= [(1-\omega)\,\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{U}]\,\boldsymbol{x} + \omega\boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{Gx} + \boldsymbol{c} \\
\Rightarrow \boldsymbol{x}^{k+1} &= \boldsymbol{Gx}^k + \boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

onde a matriz de iteração $\boldsymbol{G}$ e o vetor $\boldsymbol{c}$ são respectivamente definidos por

$$\boldsymbol{G} := (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\,\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{U}] = I - \omega(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{A} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{c} := \omega\,(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b},$$

sendo $\boldsymbol{D}$ matriz diagonal, $\boldsymbol{L}$ matriz estritamente triangular inferior e $\boldsymbol{U}$ a matriz estritamente triangular superior.

Considere a implementação do método de relaxamento conforme algoritmo 1.

**Algoritmo 1** Método de relaxação

**Entrada**: (1) Aproximação inicial $\boldsymbol{x}^0 = [0\ 0\ 0]^T$; (2) Solução exata $\boldsymbol{x}^*$ (opcional, apenas para cômputo do erro); (3) Parâmetro de relaxamento $\omega$; (4) Tolerância $\epsilon = 10^{-8}$; (5) Número máximo de iterações $Itmax$;

**Saída**: (1) Aproximação $\bar{\boldsymbol{x}}$ da solução $\boldsymbol{x}^*$; (2) Número de iterações realizadas $Ite$;

**início**

- $erro = \max_{1\leq j\leq n} \left\{x_j^0 - x_j^*\right\} / \max_{1\leq j\leq n} \left\{x_j^*\right\}$ ;
- **se** $erro < \epsilon$ **então**
  - $\bar{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^0$;
  - **término**;
- **fim**
- **para** $k$ ***de*** 1 ***até*** $Itmax$ **faça**
  - **para** $i$ ***de*** 1 ***até*** $n$ **faça**
    - $x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$ ;
  - **fim**
  - $erro = \max_{1\leq j\leq n} \left\{x_j^{(k+1)} - x_j^*\right\} / \max_{1\leq j\leq n} \left\{x_j^*\right\}$
  - **se** $erro < \epsilon$ **então**
    - $\bar{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^{k+1}$;
    - $Ite \leftarrow k$;
    - **término**
  - **fim**
- **fim**

**fim**

Fazendo uso dessa implementação obtemos a Figura 1, que descreve o valor adotado de $\omega$ versus o número de iterações até obter a convergência. Note que esse número decai a medida que aproximamos $\omega$ de $\omega_0 = 1.531281$.

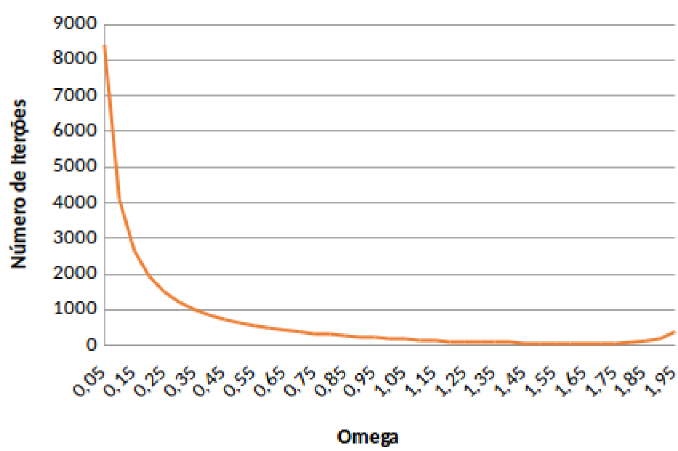


Figura 1: Relação entre o número de iterações e $\omega$.

Em particular, no método de Gauss-Seidel ($\omega = 1$) é necessário realizar 195 iterações para satisfazer o critério de parada. Utilizado $\omega = \omega_0$ esse número passa a ser de 44.

(2) Resolver o seguinte sistema usando três dígitos significativos através o método de Eliminação Direta sem pivotamento, com pivotamento parcial e com pivotamento completo.

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & = & 5 \\ 10^3 x_1 + 5x_2 - 10x_3 & = & 990 \\ -2x_1 + 2\cdot 10^3 x_2 + 4x_3 & = & 2 \end{array}\right. \tag{2}$$

Comparar os resultados obtidos e verificar qual é a melhor estratégia.

**Solução:** Consideremos a estratégia convencional de pivotamento e vamos supor que temos que trabalhar com uma aritmética de três dígitos. Assim temos

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} \boxed{0.200\times 10^1} & -0.400\times 10^1 & 0.300\times 10^1 & \vdots & 0.500\times 10^1 \\ 0.100\times 10^4 & 0.500\times 10^1 & -0.100\times 10^2 & \vdots & 0.990\times 10^3 \\ -0.200\times 10^1 & 0.200\times 10^4 & 0.400\times 10^1 & \vdots & 0.200\times 10^1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.200\times 10^1 & -0.400\times 10^1 & 0.300\times 10^1 & \vdots & 0.500\times 10^1 \\ 0 & \boxed{0.201\times 10^4} & -0.150\times 10^4 & \vdots & -0.151\times 10^4 \\ 0 & 0.200\times 10^4 & 0.700\times 10^1 & \vdots & 0.700\times 10^1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.200\times 10^1 & -0.400\times 10^1 & 0.300\times 10^1 & \vdots & 0.500\times 10^1 \\ 0 & 0.201\times 10^4 & -0.150\times 10^4 & \vdots & -0.151\times 10^4 \\ 0 & 0 & 0.150\times 10^4 & \vdots & 0.151\times 10^4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

obtendo a solução $\boldsymbol{x}^{(1)} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ com

$$\begin{aligned}
x_3 &= (0.151\times 10^4)/(0.150\times 10^4) = 0.101\times 10^1 \\
x_2 &= [-0.151\times 10^4 + (0.150\times 10^4)(0.101\times 10^1)]/(0.201\times 10^4) = 0.498\times 10^{-2} \\
x_1 &= [0.5\times 10^1 + (0.4\times 10^1)(0.498\times 10^{-2}) - (0.3\times 10^1)(0.101\times 10^1)]/(0.2\times 10^1) = 0.265\times 10^1
\end{aligned}$$

Vamos agora aplicar o pivotamento parcial no sistema. Para tal, considere os passos

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} 0.200\times 10^1 & -0.400\times 10^1 & 0.300\times 10^1 & \vdots & 0.500\times 10^1 \\ \boxed{0.100\times 10^4} & 0.500\times 10^1 & -0.100\times 10^2 & \vdots & 0.990\times 10^3 \\ -0.200\times 10^1 & 0.200\times 10^4 & 0.400\times 10^1 & \vdots & 0.200\times 10^1 \end{pmatrix} \\
&\overset{l1\longleftrightarrow l2}{=} \begin{pmatrix} \boxed{0.100\times 10^4} & 0.500\times 10^1 & -0.100\times 10^2 & \vdots & 0.990\times 10^3 \\ 0 & -0.401\times 10^1 & 0.302\times 10^1 & \vdots & 0.302\times 10^1 \\ 0 & 0.200\times 10^4 & 0.398\times 10^1 & \vdots & 0.398\times 10^1 \end{pmatrix} \\
&\overset{l2\longleftrightarrow l3}{=} \begin{pmatrix} 0.100\times 10^4 & 0.500\times 10^1 & -0.100\times 10^2 & \vdots & 0.990\times 10^3 \\ 0 & \boxed{0.200\times 10^4} & 0.398\times 10^1 & \vdots & 0.398\times 10^1 \\ 0 & 0 & 0.303\times 10^1 & \vdots & 0.303\times 10^1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

obtendo a solução $\boldsymbol{x}^{(2)} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ com

$$
\begin{aligned}
x_3 &= (0.303 \times 10^1)/(0.303 \times 10^1) = 0.100 \times 10^1 \\
x_2 &= [0.398 \times 10^1 - (0.398 \times 10^1)(0.100 \times 10^1)]/(0.200 \times 10^4) = 0 \\
x_1 &= [0.990 \times 10^3 + 0.100 \times 10^2]/(0.100 \times 10^4) = 0.100 \times 10^1
\end{aligned}
$$

Vamos usar agora a estratégia de pivotamento total. Considere

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} 0.200 \times 10^1 & -0.400 \times 10^1 & 0.300 \times 10^1 & \vdots & 0.500 \times 10^1 \\ 0.100 \times 10^4 & 0.500 \times 10^1 & -0.100 \times 10^2 & \vdots & 0.990 \times 10^3 \\ -0.200 \times 10^1 & \boxed{0.200 \times 10^4} & 0.400 \times 10^1 & \vdots & 0.200 \times 10^1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{l1 \longleftrightarrow l3 \\ c1 \longleftrightarrow c2}}{=} \begin{pmatrix} \boxed{0.200 \times 10^4} & -0.200 \times 10^1 & 0.400 \times 10^1 & \vdots & 0.200 \times 10^1 \\ 0 & 0.100 \times 10^4 & -0.100 \times 10^2 & \vdots & 0.990 \times 10^3 \\ 0 & 0.200 \times 10^1 & 0.301 \times 10^1 & \vdots & 0.500 \times 10^1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.200 \times 10^4 & -0.200 \times 10^1 & 0.400 \times 10^1 & \vdots & 0.200 \times 10^1 \\ 0 & \boxed{0.100 \times 10^4} & -0.100 \times 10^2 & \vdots & 0.990 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 0.303 \times 10^1 & \vdots & 0.302 \times 10^1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

obtendo a solução $\boldsymbol{x}^{(3)} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ com

$$
\begin{aligned}
x_3 &= (0.302 \times 10^1)/(0.303 \times 10^1) = 0.997 \times 10^0 \\
x_1 &= [0.990 \times 10^3 + (0.100 \times 10^2)(0.997 \times 10^0)]/(0.100 \times 10^4) = 0.100 \times 10^1 \\
x_2 &= [0.200 \times 10^1 + 0.200 \times 10^1 - (0.400 \times 10^1)(0.997 \times 10^0)]/(0.200 \times 10^4) = 0.5 \times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

Na estratégias de pivotamento parcial o vetor solução é igual a solução exata $x = x^* = [1,\ 0,\ 1]^t$. Na estratégias de pivotamento total o vetor solução é quase igual a solução exata $x = [1,\ 0.5 \times 10^{-5},\ 0.997]^t$.

Não existe um teorema que garante que o pivotamento total é melhor do parcial, só pode se provar que somente para $n$ grande é esperavel que o pivotamento total seja melhor do pivotamento parcial.

No caso sem pivoteamento a solução é muito diferente daquela teorica, por causa dos erros de arredondamento, que influenciam o resultado final. O método sem pivotamento resulta ser instável.

(3) Verificar se o sistema linear do ponto anterior e o seguinte satisfazem a condição de convergência de Jacobi do sistema de ser diagonal dominante.

$$
\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 0.5x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -5 \end{cases} \tag{3}
$$

Implementar o método de Jacobi para ambos os sistemas e comparar as soluções obtidas com as teóricas. A solução teórica do sistema (3) é dado por $\boldsymbol{x}^* = [1 \ \ -1 \ 2]^T$.

**Solução:** A matriz associada ao sistema (2) não é diagonal dominante, nem se alterarmos linhas ou colunas (verifique). Como consequência, o método de Jacobi não converge para a solução $\boldsymbol{x}^*$.

Por outro lado, a matriz associada ao sistema (3) é diagonal dominante. Isso pode ser verificado notando que $|20| > |2|+|-10|$, $|5| > |3|+|-0.5|$ e $|-4| > |2|+|-1|$. Aplicando o método de Jacobi a esse sistema obtemos os valores descritos na tabela abaixo. Note que o método está convergindo para $\boldsymbol{x}^*$ como desejado.

Tabela 1: Jacobi

| Iteração $k$ | $\boldsymbol{x}^k$ | | | $\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*\|_\infty / \|\boldsymbol{x}^*\|_\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_1 = 0.00000$ | $x_2 = 0.00000$ | $x_3 = 0.00000$ | 1.00000 |
| 1 | $-0.100000$ | $-0.600000$ | 1.250000 | 0.550000 |
| 2 | 0.585000 | $-0.415000$ | 1.350000 | 0.325000 |
| 3 | 0.616500 | $-0.816000$ | 1.646250 | 0.191750 |
| 4 | 0.804725 | $-0.805275$ | 1.762250 | 0.118875 |
| 5 | 0.861653 | $-0.906610$ | 1.853681 | 0.073159 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 16 | 0.999181 | $-0.999363$ | 1.999096 | 0.000452 |
| 17 | 0.999485 | $-0.999599$ | 1.999431 | 0.000284 |
| 18 | 0.999676 | $-0.999748$ | 1.999642 | 0.000179 |
| 19 | 0.999796 | $-0.999841$ | 1.999775 | 0.000113 |
| 20 | 0.999871 | $-0.999900$ | 1.999858 | 0.000071 |

(4) Exemplo comparação convergência e velocidade dos metodos Gauss-Seidel e Jacobi O erro de um método iterativo com matriz de iteração $P4$ na iteração $k$ satisfa a relação $\|e^{(k)}\| \leq \|P^{(k)}\| \|e^0\|$. Não vale que para cada $P$, $Q$ matrizes : $\forall k \|P^k\| < \|Q^k\|$ ou $\forall k \ \|Q^k\| < \|P^k\|$. Considere por exemplo $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, por algum expoente $k$ vale uma desiguladade por outros vale a outra desigualdade usando a norma $\|.\|_\infty$.

Se queremos comparar a velocidade dos metodos para $k$ grande e' então preferivel não comparar as normas das matrizes de iteração.

Seja $e^{(k)}$ o erro ao passo $k$, $e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$, vale que $\lim \sqrt{\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|}} = \rho(G)$ onde $G$ é a matriz de iteração, e $\rho(G)$ é o raio espetral de G (ou seja o maximo autovalor de $G$ em modulo) Para $k$ grande resulta então que $(\rho(G))^k \approx \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|}$. Então se temos dois metodos iterativos como Jacobi e Gauss-Seidel tais que aplicados a um problema $Ax = b$ resulta que $\rho(G_J) < \rho(G_{GS})$ teremos que o método de Jacobi será o mais rápido e se $\rho(G_{GS}) < \rho(G_J)$ o método de Gauss-Seidel é o mais rápido.

Sabemos também que o raio espetral pode ser usado para provar a convergência. Um método iterativo $x^{(k+1} = Gx^{(k)} + c$ é convergente se e só se $\rho(G) < 1$.

Verifique o que acontece nos seguintes casos:

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $b = (7,\ 13,\ -4)^t$
- $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; $b = (-6,\ -5,\ 3)^t$
- $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$; $b = (6,\ -7,\ -14)^t$

Computa o raio espetral e calcule 10 iterações do método de Jacobi e Gauss Seidel. Compara e comente os resultados obtidos.

**Solução:** Todos os sistemas tem a solução $x^* = [1\ 1\ 1]^t$. As seguintes matrizes de iteração de Jacobi e Gauss-Seidel, os relativos raios espetrais $\rho(.)$, e erros numericos em norma infinito $e = \|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ são obtidos:

- $G_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $G_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

  Os raios espetrais associados são $\rho(G_J) = 1.337510$, $\rho(G_{GS}) = 0.25$. Então o método de Jacobi não converge em vez Gauss-Seidel converge. Os erros numéricos dos métodos apos 10 iterações são: $e_J \approx 30$, $e_{GS} \approx 10^{-5}$

- $G_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{4}{7} & 0 & \frac{8}{7} \\ \frac{5}{9} & \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$, $G_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$

  Os raios espetrais associados são $\rho(G_J) = 0.8133091$, $\rho(G_{GS}) = 1.111111$. Então o método de Gauss-Seidel não converge e Jacobi converge. Os erros numéricos dos métodos apos 10 iterações são: $e_J \approx 3 \times 10^{-2}$, $e_{GS} \approx 4$

- $G_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$, $G_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} \\ 0 & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}$

  Os raios espetrais associados são $\rho(G_J) = 0.4438188$, $\rho(G_{GS}) = 0.0185852$. Ambos métodos convergem, método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente. Os erros numéricos dos métodos apos 10 iterações são: $e_J \approx 2 \times 10^{-3}$, $e_{GS} < 10^{-10}$.

(5) Avaliar se o critério de convergência de Sassenfeld é satisfeito nos seguintes sistemas a menos de permutação de colunas ou linas

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 & = & 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = & -2 \\ 7x_1 - 4x_2 + 0.5x_3 & = & 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 4 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 & = & -3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 0.5x_3 & = & 5 \end{cases}$$

**Solução:** Note que para satisfazer o critério de Sassenfeld ($\beta_i < 1, i = 1, \dots, 3$) na primeira linha equivale a ter a primeira linha diagonal predominante. Sabemos também que se o critério das linhas é satisfeito então o criterio de Sassenfeld será também satisfeito.
O primeiro sistema satisfa o critério das linhas, então satisferá o criterio de Sassenfeld.

O segundo sistema se trocamos, a terceira linha com a primeira, satisferá o criterio de Sassenfeld, embora que não satisfa o criterio das linhas (como podemos ver na terceira linha apos a permutação). Com $\beta_1 = \frac{9}{14} < 1, \beta_2 = \frac{32}{70} < 1, \beta_3 = \frac{199}{280} < 1$.

O terceiro sistema apos a troca da terceira linha com a primeira satisfa o criterio de Sassenfeld Com $\beta_1 = \frac{9}{14} < 1, \beta_2 = \frac{23}{70} < 1, \beta_3 = \frac{181}{280} < 1$.