MS211, Cálculo Numérico I
Segundo Semestre 2018, IMECC-UNICAMP

Lista de Exercícios 2

(1) O método de Illinois é uma variante do método da Falsa Posição que é usado quando um extremo do intervalo a_k ou b_k imobiliza-se, ou seja, quando $a_{k+1} = a_k$ ou $b_{k+1} = b_k$. No caso $a_{k+1} = a_k$ toma como próximo x_{k+1} a interseção da secante dos pontos $(a_k, f(a_k)/2)$ e $(b_k, f(b_k))$. Vice-versa, se $b_{k+1} = b_k$ toma como próximo x_{k+1} a interseção da secante dos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k)/2)$. Descrever a vantagem do método de Illinois com respeito ao método da Falsa Posição com um exemplo gráfico e numérico.

Solução: Na maioria dos problemas o método da falsa posição pode convergir a uma taxa próximo ao do método da secante (≈ 1.618). No entanto, quando a função f é côncava ($f'' < 0$) ou convexa ($f'' > 0$) no intervalo inicial que contem a solução, o método da falsa posição possui taxa de convergência inferior (1.0) e o caso pior é quando proximo da solução $f'' \approx 0$. Nestes casos, ocorre que um dos extremos se mantém fixo $a_{k+1} = a_k$ ou $b_{k+1} = b_k$. O método de Illinois tenta corrigir esta convergência lenta fazendo uma modificação da reta secante. Para exemplificar, considere a função $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ e os pontos iniciais $a_0 = -0.5$ e $b_0 = 1$. Note que $x = 0 \in [a_0, b_0]$ é uma raiz de $f(x)$. Assuma uma tolerância de $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.01$.

Aplicando o método da Falsa Posição obtemos os valores descritos, para cada iteração, na Tabela 1 abaixo. Geometricamente, o método é ilustrado pela Figura 1a para as iterações iniciais.

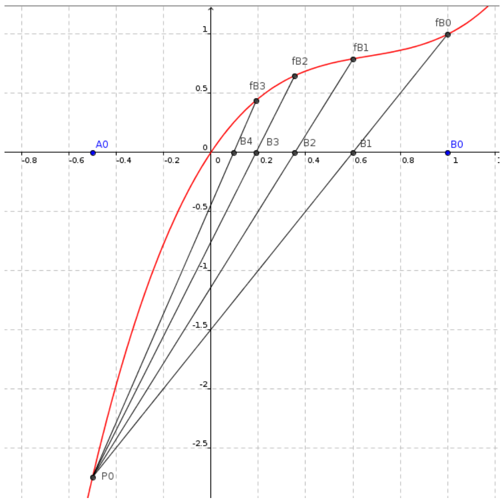
Tabela 1: Falsa Posição

Iteração k	x_k	a_k	b_k	$\lvert a_k - b_k\rvert$	$\lvert f(x_k)\rvert$
-	-	$a_0 = -0.5000$	$b_0 = 1.0000$	1.500000	-
1	1.500000	-0.500000	0.600000	1.100000	0.792000
2	0.354037	-0.500000	0.354037	0.854037	0.649494
3	0.190868	-0.500000	0.190868	0.690868	0.440789
4	0.095429	-0.500000	0.095429	0.595429	0.251598
5	0.045519	-0.500000	0.045519	0.545519	0.128458
6	0.021174	-0.500000	0.021174	0.521174	0.061748
7	0.009729	-0.500000	0.009729	0.509729	0.028809
8	0.004444	-0.500000	0.004444	0.504444	0.013253
9	**0.002025**	-0.500000	0.002025	0.502025	0.006057

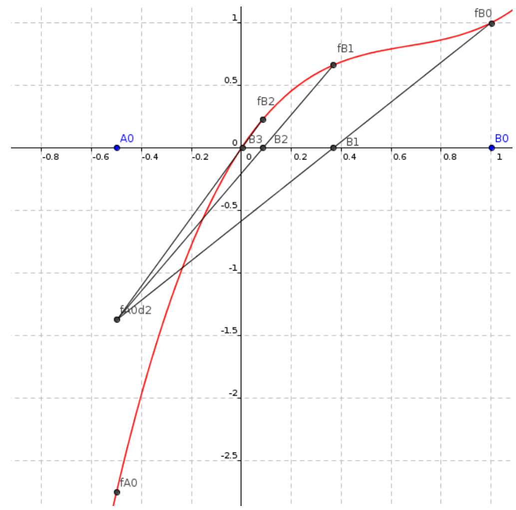
Apliquemos agora o método de Illinois com

$$x_{k+1} = \frac{a_k f(b_k) - \frac{1}{2} b_k f(a_k)}{f(b_k) - \frac{1}{2} f(a_k)},$$

cujos valores estão representados na Tabela 2. Figura 1b illustra o procedimento.



(a) Método da Falsa Posição.



(b) Método de Illinois.

Figura 1: Iterações dos métodos da Falsa Posição e Illinois.

Tabela 2: Illinois

Iteração k	x_k	a_k	b_k	$\lvert a_k - b_k \rvert$	$f(x_k)$
-	-	$a_0 = -0.500000$	$b_0 = 1.000000$	1.500000	-
1	0.368421	-0.500000	0.368421	0.868421	0.662341
2	0.086097	-0.500000	0.086097	0.586097	0.229916
3	**0.002134**	-0.500000	0.002134	0.502134	0.006384

(2) Escrever o algoritmo do método da Secante e de Newton. Quais são as diferenças entre esses dois métodos?

Solução: Considere a equação $f(x) = 0$, com uma função $f(x)$ contínua e diferenciável. Para utilizar o método de Newton é necessário avaliar a derivada da função $f(x)$, que por vezes pode ser bastante trabalhosa. Além disso, a taxa de convergência é quadrática e apenas um ponto "chute" inicial é necessário. Por outro lado, o método da secante não exige a derivada de $f(x)$. No entanto, a taxa de convergência ≈ 1.618 é menor com respeito ao método de Newton e dois pontos iniciais são necessários. Os algoritmos do método de Newton e Secante são descritos, respectivamente, em Algoritmo 1 e 2.

(3) Usar o método de bisseção, da secante e da falsa posição para encontrar o zero aproximado a três dígitos de $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-4}$. Compare os resultados e número de iterações obtidas.

Solução: A função $f(x)$, definida em $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{4\}$, possui raiz $x^* = \dfrac{5}{3}$. Assumimos o intervalo dado por $x^* \in I = [1, 2] \subset \mathcal{D}_f$ e apliquemos os métodos acima mencionados. As Tabelas 3, 4 e 5 apresentam os valores obtidos utilizando, respectivamente, o método da bisseção, falsa posição e secante. Note que, no método da falsa posição, ocorreu o caso discutido na questão 1, onde $b_{k+1} = b_k$. Não pode usar um intervalo inicial $[a, b]$ que contém 4 porque em $x = 4$ há um assintoto vertical: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$.

Algoritmo 1 Método de Newton-Raphson

Entrada: (1) Aproximação inicial x_0; (2) Tolerâncias ϵ_1 e ϵ_2; (3) Número máximo de iterações $Itmax$;

Saída: Aproximação $\bar{x}$ da raiz x^*;

início

  se $|f(x_0)| < \epsilon_1$ **então**

    $\bar{x} \leftarrow x_0$;

    término

  fim

  para k ***de*** 1 ***até*** $Itmax$ **faça**

    se $|f(x_0)| \neq 0$ **então**

      $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$;

      se $|f(x_1)| < \epsilon_1$ *ou* $|x_1 - x_0| < \epsilon_2$ **então**

        $\bar{x} \leftarrow x_1$;

        término

      fim

      $x_0 = x_1$;

    senão

      Erro, $f'(x) = 0$;

      $\bar{x} \leftarrow x_0$;

      término

    fim

  fim

fim

Algoritmo 2 Método da Secante

Entrada: (1) Aproximações iniciais x_0 e x_1; (2) Tolerâncias ϵ_1 e ϵ_2; (3) Número máximo de iterações $Itmax$;

Saída: Aproximação $\bar{x}$ da raiz x^*;

início

 se $|f(x_0)| < \epsilon_1$ **então**

  $\bar{x} \leftarrow x_0$;

  término;

 fim

 se $|f(x_1)| < \epsilon_1$ *ou* $|x_1 - x_0| < \epsilon_2$ **então**

  $\bar{x} \leftarrow x_1$;

  término;

 fim

 para k ***de*** 1 ***até*** $Itmax$ **faça**

  $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$;

  se $|f(x_2)| < \epsilon_1$ *ou* $|x_2 - x_1| < \epsilon_2$ **então**

   $\bar{x} \leftarrow x_2$;

   término

  fim

  $x_0 = x_1$;

  $x_1 = x_2$;

 fim

fim

Tabela 3: Bissecção					
Iteração k	x_k	a_k	b_k	$\|a_k - b_k\|$	$\|x_k - x^*\|$
-	-	$a_0 = 1.00000$	$b_0 = 2.00000$	1.00000	-
1	1.50000	1.50000	2.00000	0.50000	0.16667
2	1.75000	1.50000	1.75000	0.25000	0.08333
3	1.62500	1.62500	1.75000	0.06250	0.04167
4	1.68750	1.62500	1.68750	0.06250	0.02083
5	1.65625	1.65625	1.68750	0.03125	0.01042
6	1.67188	1.65625	1.67188	0.01563	0.00521
7	1.66406	1.66406	1.67188	0.00781	0.00260
8	1.66797	1.66406	1.66797	0.00391	0.00130
9	**1.66602**	1.66602	1.66797	0.00195	0.00065

Tabela 4: Falsa Posição					
Iteração k	x_k	a_k	b_k	$\|a_k - b_k\|$	$\|x_k - x^*\|$
-	-	$a_0 = 1.00000$	$b_0 = 2.00000$	1.00000	-
1	1.40000	1.40000	2.00000	0.60000	0.26667
2	1.54118	1.54118	2.00000	0.45882	0.12549
3	1.60210	1.60210	2.00000	0.39790	0.06457
4	1.63184	1.63184	2.00000	0.36816	0.03483
5	1.64740	1.64740	2.00000	0.35260	0.01927
6	1.65585	1.65585	2.00000	0.34415	0.01081
7	1.66055	1.66055	2.00000	0.33945	0.00612
8	1.66319	1.66319	2.00000	0.33681	0.00347
9	1.66469	1.66469	2.00000	0.33531	0.00198
10	1.66554	1.66554	2.00000	0.33446	0.00113
11	**1.66602**	1.66602	2.00000	0.33398	0.00064

Tabela 5: Secante		
Iteração k	x_{k+1}	$\|x_k - x^*\|$
-	$x_0 = 2.00000$	0.33333
-	$x_1 = 1.80000$	0.13333
1	1.68571	0.01905
2	1.66776	0.00109
3	**1.66668**	0.00001

(4) Use o método de Newton para aproximar as duas raízes de $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$, com um erro de dois dígitos significativos partindo de dois pontos iniciais x_0. Quais os pontos que permitem aproximar a menor e a maior raiz?

Solução: Realizando uma análise da função podemos verificar que $f(x)$ possui duas raízes reais localizadas nos intervalos $I_1 = [0, 1]$ e $I_2 = [3, 4]$. Aplicando o método de Newton na equação $f(x) = 0$ obtemos os resultados descritos na Tabela 6.

Tabela 6: Newton						
Ite k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
-	$x_0 = 0.50000$	2.750000	-	$x_0 = 3.60000$	2.750000	-
1	0.805556	0.280093	0.305556	3.194444	0.440833	0.383333
2	0.844638	0.004582	0.039083	3.155362	0.010940	0.060388
3	**0.845299**	0.000001	0.000661	**3.154701**	0.000007	0.001577

Para aproximar a maior e menor raiz é necessário que $x_0 > 2$ e $x_0 < 2$, respectivamente. Verifique essa afirmação de forma interativa alterando x_0 utilizando o link: `https://www.geogebra.org/m/rhukprta`. Note que $x = 2$ é o vértex da parábola onde $f'(x) = 0$.

(5) Aplicar duas iterações de Newton para aproximar a raiz cúbica $n^{1/3}$ de um número dado n. Testar o seu procedimento com $n = 5$, $n = 27$ e $n = 15$.

Solução: Considere a função $f(x) = x^3 - n$. Note que a raiz desta função é exatamente a raiz cúbica $n^{1/3}$ de um dado número n. Aplicando duas iterações do método de Newton na equação $f(x) = 0$ obtemos os dados descritos na Tabela 7. Utilizamos os pontos iniciais $x_0 = 2.0$, $x_0 = 2.5$ e $x_0 = 2.8$ para aproximar, respectivamente, a raiz cúbica $n^{1/3}$ de $n = 5$, $n = 27$ e $n = 15$. Pode verificar que os resultados obtidos são boas aproximações usando um calculador e que com mais iterações os resultados ficam sempre melhores.

Tabela 7: Newton						
Iteração k	x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
-	$x_0 = 2.00000$	3.000000	$x_0 = 2.50000$	-11.3750	$x_0 = 2.800000$	6.951999
1	1.750000	0.359375	3.106667	2.983614	2.504422	0.708055
2	**1.710884**	0.007973	**3.003620**	0.097870	**2.504422**	0.010585

(6) Calcule as raízes de $f(x) = (4x - 7)/(x - 2)$ a começar dos pontos $x_0 = 1.625$, 1.875, 1.5, 2.5 usando o método de Newton. Verificar antes se o método de Newton pode ser aplicado em cada caso.

Solução: A raiz exata de $f(x)$ é dada por $\bar{x} = 1.75$ e a função iteração de Newton é definida por $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$. Note que $|\varphi'(x)| = |8x - 14| < 1 \Leftrightarrow x \in \bar{I} = (1.625, 1.875)$ e que esse intervalo é centrado na raiz. Ambas as funções $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$, em particular em $\bar{I}$. Todos os pontos iniciais propostos não pertencem ao intervalo $\bar{I}$, não tendo garantia de convergência. Contudo, verificamos que para $x_0 = 1.625$ e $x_0 = 1.875$ a sequência de pontos $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton converge para $\bar{x}$. Para os demais pontos o método diverge. A Tabela 8 apresenta os valores obtidos aplicando o método na equação $f(x) = 0$ com critério de parada $|f(x_k)| < 0.001$.

Tabela 8: Método de Newton				
Iteração k	x_k	x_k	x_k	x_k
-	$x_0 = 1.625$	$x_0 = 1.875$	$x_0 = 1.50$	$x_0 = 2.500000$
1	1.812500	1.812500	2.000000	4.000000
2	1.765625	1.765625	2.000000	22.000000
3	1.750977	1.750977	2.000000	1642.0000
4	**1.750004**	**1.750004**	2.000000	10761682.0

(7) A equação $2x^2 - 5x - 7 = 0$ pode ser reformulada de várias maneiras para acomodar o método do ponto fixo: $x = \dfrac{2x^2-7}{5}$, $x = \sqrt{\dfrac{5x+7}{2}}$, $x = \dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{2x}$. Destas formulações, quais podem ser usadas para aproximar a raiz a esquerda e quais podem ser usadas para aproximar a raiz a direita? Motive sua resposta.

Solução: Considere as raízes exatas de $f(x) = 2x^2 - 5x - 7$ dadas por $\bar{x} = -1$ e $\bar{\bar{x}} = 3.5$. A sequência de pontos $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para a raiz ξ centrada em I se

(i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I;

(ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \quad \forall x \in I$;

(iii) $x_0 \in I$.

Considere a primeira função de iteração: $\varphi(x) = \dfrac{2x^2-7}{5}$. Notemos que

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{4}{5}x\right| < 1 \Leftrightarrow x \in \bar{I} = \left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

Logo, existe um intervalo I centrado em $\bar{x}$ tal que $I \subset \bar{I}$. Assumindo, por exemplo, $x_0 \in I = [-1.2, -0.8]$ e verificado que as funções $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I, teremos a convergência para a raiz $\bar{x}$. Desta forma, $\varphi(x)$ pode ser usada para determinar a raiz à esquerda de $f(x)$. Para $x_0 \notin I$ não há garantias de que a sequência resultante seja convergente. A Tabela 9 apresenta os valores obtidos utilizando como valores iniciais $x_0 = -0.75$, $x_0 = -2.00 \notin I$ e $x_0 = 4.00 \notin I$. O critério de parada adotado é $|f(x_k)| < 0.001$.

Tabela 9: Método do ponto fixo

Iteração k	x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
-	$x_0 = -0.75$	-2.125000	$x_0 = -2.00$	11.00000	$x_0 = 4.00$	5.000000
1	-1.175000	1.636250	0.200000	2.983614	5.000000	18.000000
2	-0.847750	-1.323890	-1.384000	0.097870	8.600000	97.920000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
35	$\mathbf{-1.000091}$	0.000821	-0.999757	0.097870	NaN	NaN
$\vdots$	-	-	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
39	-	-	$\mathbf{-0.999900}$	-0.000897	NaN	NaN

Considere a segunda função de iteração: $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{5x+7}{2}}$. É possível verificar que

$$|\varphi'(x)| < 1 \Leftrightarrow x \in \bar{I} = (-0.775, +\infty).$$

Assim, existe um intervalo I centrado em $\bar{\bar{x}}$ tal que $I \subset \bar{I}$. Assumindo, por exemplo, $x_0 \in I = [1, 6]$ e verificado que as funções $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I, teremos a convergência para a raiz $\bar{\bar{x}}$. Desta forma, $\varphi(x)$ pode ser usada para determinar a raiz à direita de $f(x)$. A Tabela 10 apresenta os valores obtidos utilizando como valores iniciais $x_0 = 1.50$, $x_0 = -1.01 \notin I$ (próximo da menor raiz) e $x_0 = 10.00 \in I$.

Tabela 10: Método do ponto fixo						
Iteração k	x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
-	$x_0 = 1.50$	-10.00000	$x_0 = -1.01$	0.090200	$x_0 = 10.00$	143.000000
1	2.692582	-5.962912	0.987421	-9.987104	5.338539	23.307304
2	3.198665	-0.960040	2.443062	-7.278206	4.104430	6.170544
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	3.499771	-0.002060	3.499141	-0.007725	3.500428	0.003851
10	**3.499918**	-0.000736	3.499693	-0.002759	3.500153	0.001375
11	-	-	**3.499890**	-0.000986	**3.500055**	0.000491

Considere a terceira função de iteração: $\varphi(x) = \frac{5}{2} + \frac{7}{2x}$. É possível verificar que

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{7}{2x^2}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in \bar{I} = \mathbb{R} - \left[-\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right].$$

Assim, existe um intervalo I centrado em $\bar{\bar{x}}$ tal que $I \subset \bar{I}$. Assumindo, por exemplo, $x_0 \in I = [2, 5]$ e verificado que as funções $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I, teremos a convergência para a raiz $\bar{\bar{x}}$. Desta forma, $\varphi(x)$ pode ser usada para determinar a raiz à direita de $f(x)$. A Tabela 11 apresenta os valores obtidos utilizando como valores iniciais $x_0 = -2.00$, $x_0 = 1.10 \notin I$ e $x_0 = 11.00 \in I$.

Tabela 11: Método do ponto fixo						
Iteração k	x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
-	$x_0 = -2.00$	11.00000	$x_0 = 1.10$	-10.080000	$x_0 = 11.00$	180.000000
1	0.750000	-9.625000	5.681818	29.157025	2.818182	-5.206612
2	7.166667	59.888889	3.116000	-3.161088	3.741935	2.294485
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	3.499686	-0.002826	**3.500065**	0.000587	**3.499964**	-0.000321
10	**3.500090**	0.000808	-	-	-	-