MS211, Cálculo Numérico, Turma C
Segundo Semestre 2018, IMECC-UNICAMP

Lista de Exercícios 6

(1) Verificar quais dos seguintes problemas são de valor inicial (PVI) , quais de valor ao contorno (PVC) e quais não admitem solução

$$\begin{cases} y''' = 5y + 3y^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) + y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 3xy + \sqrt{y} \\ y(2) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 3xy + \sqrt{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y'' + 3y - 4yx^2 = 7 \\ y(0) + y'(0) = 2 \\ y(1) - 2y'(1) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y'' + 3y - 4yx^2 = 7 \\ y(0) + y'(0) = 2 \\ y(0) - 2y'(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = 3xy - 2y + 1 \\ y'(0) = 2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = 3xy - 2y + 1 \\ y(0) = 2 \\ y(1) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''' = 3xy - 2y' + 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''' = 3xy - 2y' + 1 \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = 2 \\ y''(-1) = 3 \end{cases}$$

(2)
- Descrever geometricamente o método de Eulero progressivo, Eulero regressivo, o método de Crank-Nicolson e de Heun.
- O que significa que o método de Crank-Nicolson é implícito? Como pode se implementar um método implícito ?
- Determinar uma aproximação de $y(0.2)$ com espaçamento $h = 0.1$ para os seguintes dois problemas:

$$\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y - \sin(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(3) Verificar que os seguinte método de Runge-Kutta tem erro de truncamento que converge a zero e que o método tem ordem de convergência de ordem 1

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n) + \frac{h}{6}f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) + \frac{h}{6}f(x_{n-1}, y_n - hf(x_n, y_n)$$

(4)
- Implementar o método da Serie de Taylor de ordem 2 para o seguinte problema

$$\begin{cases} y' = y - \sin(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Achar a aproximação de $y(0.2)$ com passo $h = 0.1$
- Qual e' a expressão do erro de truncamento do método?

- Comparar a solução numérica do método da Serie de Taylor de ordem 2

$$\begin{cases} y' = -2y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

com aquela teórica $y(x) = 3e^{-2x}$, verificar que depois um passo $|y(0.1) - y_1| < max_{x\in[0,0.1]}(|y'''(x)|)\frac{0.001}{6}$
e que depois dois passos $|y(0.2) - y_2| < \max_{x\in[0,0.2]}(|y'''(x)|)(\frac{0.001}{3} + \frac{0.0001}{3})$

(5) Implementar o método de Crank-Nicolson para o problema

$$\begin{cases} y' = e^x - 2\cos y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Encontrar o passo h que garante que o método do ponto fixo para achar $y_{n+1} = \phi(y_{n+1})$ seja convergente

(6) Determinar a ordem dos seguintes métodos para aproximar a derivada primeira $y'(x)$:

- $Dy = \dfrac{y_{i+1} - 2y_{i+2} + y_i}{2h}$
- $Dy = \dfrac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h}$

(7) Resolver numericamente o seguinte problema de contorno

$$\begin{cases} 2y'' - 4y' + 5yx = 3 \\ y(0) = 2y(1) = 4 \end{cases}$$

Use aproximações de segunda ordem para as derivadas. Resolve o mesmo problema com as seguintes condições a fronteira

$$\begin{cases} y'(0) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(0) = 2 \\ y(1) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) + y'(1) = 2 \\ y'(1) + y(0) = 4 \end{cases}$$

Use as aproximações de segunda ordem $y'(x_i) = \dfrac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h}$ e $y'(x_i) = \dfrac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h}$ na fronteira.