MS211, Cálculo Numérico I
Segundo Semestre 2018, IMECC-UNICAMP

Lista de Exercícios 3

(1) O método de Relaxação é uma variante do método iterativo de Gauss-Seidel :

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

com $0 < \omega < 2$ que é condição necessária pela convergência.

Nota se que o método de Gauss-Seidel obtém se para $\omega = 1$. Estes métodos permitem de escolher a ω_0 ótima (que e' aquela que minimiza o raio espectral da matriz de iteração) para que o método seja o mais rápido respeito aqueles associados a outras ω. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -7 \\ 4 & 5 & -3 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

e o vetor $b = [4\ 6\ 2]^t$. Provar que o método de relaxamento com $\omega_0 = 1.531281$ é mais rápido de Gauss-Seidel, usando poucas iteradas. Use que a solução teórica do sistema $Ax = b$ é $x = [1\ 1\ 1]^t$.

(2) Resolver o seguinte sistema usando três dígitos significativos através o método de Eliminação Direta sem pivotamento, com pivotamento parcial e com pivotamento completo.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & = & 5 \\ 10^3x_1 + 5x_2 - 10x_3 & = & 990 \\ -2x_1 + 2\cdot 10^3x_2 + 4x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Comparar os resultados obtidos. E verificar qual'e' a estratégia melhor.

(3) Verificar se o sistema linear do ponto anterior e o seguinte satisfazem a condição de convergência de Jacobi do sistema de ser diagonal dominante.

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 - 10x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - \frac{1}{2}x_3 & = & -3 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 & = & -5 \end{cases}$$

Implementar o método de Jacobi para ambos os sistemas e comparar as soluções obtidas com aquela teórica $x = [1\ -1\ 2]^t$.

(4) Exemplo comparação convergência e velocidade dos metodos Gauss-Seidel e Jacobi O erro de um método iterativo com matriz de iteração $P4$ na iteração k satisfa a relação $\|e^{(k)}\| \leq \|P^{(k)}\|\|e^0\|$. Não vale que para cada P, Q matrizes : $\forall k\|P^k\| < \|Q^k\|$ ou

$\forall k \|Q^k\| < \|P^k\|$. Considere por exemplo $P = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 00.6 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0.50.25 \\ 00.5 \end{pmatrix}$, por algum expoente k vale uma desiguladade por outros vale a outra desigualdade usando a norma $\|.\|_\infty$.

Se queremos comparar a velocidade dos metodos para k grande e' então preferivel não comparar as normas das matrizes de iteração.

Seja $e^{(k)}$ o erro ao passo k, $e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$, vale que $\lim \sqrt{\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|}} = \rho(G)$ onde G é a matriz de permutação, e $\rho(G)$ é o raio espetral de G (ouuseja o maximo autovalor de G em modulo) Para k grande resulta então que $(\rho(G))^k \approx \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|}$. Então se temos dois metodos iterativos como Jacobi e Gauss-Seidel tais que aplicados a um problema $Ax = b$ resulta que $\rho(G_J) < \rho(G_{GS})$ teremos que o método de Jacobi será o mais rápido e se $\rho(G_{GS}) < \rho(G_J)$ o método de Gauss-Seidel é o mais rápido.

Sabemos também que o raio espetral pode ser usado para provar a convergência. Um método iterativo $x^{(k+1} = Gx^{(k)} + c$ é convergente se e só se $\rho(G) < 1$.

Verifique o que acontece nos seguintes casos:

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $b = (7,\ 13,\ -4)^t$
- $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; $b = (-6,\ -5,\ 3)^t$
- $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$; $b = (6,\ -7,\ -14)^t$

Computa o raio espetral e calcule 10 iterações do método de Jacobi e Gauss Seidel. Compara e comente os resultados obtidos.

(5) Avaliar se o critério de convergência de Sassenfeld é satisfeito nos seguintes sistemas a menos de permutação de colunas ou linas

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 & = & 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = & -2 \\ 7x_1 - 4x_2 + 0.5x_3 & = & 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 4 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 & = & -3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 0.5x_3 & = & 5 \end{cases}$$