ALUNO	RA

Exame - MS211 - Tarde - Turma K – 12/12/2017

INSTRUÇÕES

1. É permitido apenas o uso de calculadoras científicas;
2. Serão consideradas somente as questões escritas de forma clara e devidamente justificadas;
3. Exceto quando mencionado o contrário, execute os cálculos considerando a representação na base 10 com 5 dígitos significativos e truncamento;

Questão 1. Considere a seguinte função real $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, \infty)$, que possui como raiz $\xi = 2a$.

(a) Determinar uma aproximação para a raiz de f com $a = 1$ usando duas iterações do método Secante com $x_0 = 1$ e $x_1 = 1,5$.

(b) Considere um método do ponto fixo (MPF) associado ao problema de procura do zero no item (a). Determine um intervalo $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$, $\delta > 0$, tal que para todo $x_0 \in I$ o MPF produz uma sequência que converge para ξ.

(c) Exiba a função de iteração de método de Newton e execute duas iterações do método de Newton com $x_0 = 1,5$.

Questão 2. Considere os seguintes pares de valores de uma função f desconhecida

x	-1	0	1	3	4
y	-1,8	0,2	-0,5	5	14

e a curva $\varphi(x) = ax^3 + b(x^2 + 1) + c$.

(a) Exiba as equações que devem ser resolvidas no cálculo dos coeficientes a, b, c via Quadrados Mínimos.

(b) Resolve o sistema determinado no item (a) com o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial e determine os coeficientes a, b, c.

(c) Há garantias de que o sistema do item (a) pode ser resolvido com Gauss Seidel? Se sim, efetue uma iteração do método de Gauss Seidel ao respectivo sistema com $x^{(0)} = (1, 0, 1)^t$.

Questão 3. Considere a seguinte função $f(x) = e^{-x^2} - \frac{1}{2}$

(a) Determine o polinômio p_2 de grau igual ou menor a 2 que interpole f em $-1, 0, 1$ utilizando a forma de Lagrange.

(b) Estime o valor de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ utilizando a regra dos Trapézios com quatro repetições e o seu erro.

(c) Quantas repetições no mínimo é necessário para obtermos um erro menor ou igual à 10^{-3} para $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ utilizando a regra de Simpson repetida?

Questão 4. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} y''' - 2y + y'' = 1 \\ y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = -1 \end{cases}.$$

Utilizando o método de Euler com $h = 0,5$, determine aproximações para $y(2)$, $y'(2)$ e $y''(2)$.

Fórmulas úteis:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \text{ onde } L_k(x) = \frac{\prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}, \ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$|E_n(x)| = \left| f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \text{ e } f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \ x, \xi_x \in (x_0, x_n).$$

$$I \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\}, \ I \approx \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\},$$

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ , \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

$$|E| \leq \frac{(b-a)\ h^2}{12} M_2, \ \ M_2 = \max_{x\in[a,b]}\ |f''(x)|$$

$$|E| \leq \frac{(b-a)\ h^4}{180} M_4, \ \ M_4 = \max_{x\in[a,b]}\ |f^{(IV)}(x)|$$

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \ y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))].$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Boa Prova!