ALUNO	RA

Segunda Prova - MS211 - Tarde - Turma K – 28/11/2017

INSTRUÇÕES

1. É permitido apenas o uso de calculadoras científicas;
2. Serão consideradas somente as questões escritas de forma clara e devidamente justificadas;
3. Exceto quando mencionado o contrário, execute os cálculos considerando a representação na base 10 com 5 dígitos significativos e truncamento;
4. Pesos das questões na Nota da prova: Q1 (0,2), Q2 (0,3), Q3 (0,25), Q4 (0,25)

Questão 1. Considere os seguintes pares de valores de uma função f desconhecida

x	-2	-1	1	3
y = f(x)	1	2	3	2

(a) Determine a melhor curva φ que se ajuste aos dados acima tal que (*Dica: minimize a soma das diferenças ao quadrado*)

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax+b & , \text{ se } x<1 \\ ax+b+c & , \text{ se } x=1 \\ c & , \text{ se } x>1 \end{cases} .$$

(b) Explique como podemos ajustar uma função da forma $\Psi(x) = ax^b - 1$ aos dados da tabela acima.

Questão 2. Considere os seguintes pares de valores de uma função f desconhecida

x	0	0.3	0.5	0.75	1
y = f(x)	1	2	3	2	1

(a) Utilizando interpolação e a forma de Newton para polinômios de grau 2, estime o valor de $f(0,25)$.

(b) Providencie uma estimativa para o erro cometido na estimativa de $f(0,25)$ no item (a).

(c) Estime o valor de $\int_0^1 f(x)dx$ utilizando a regra de Simpson com duas repetições e o seu erro.

(d) Estime o valor de $\int_0^1 f(x)dx$ utilizando uma regra dos retângulos (a escolha) com repetições.

Questão 3. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = ay + 1 \\ y(0) = b \end{cases}$$

(a) Estime $y(0.2)$ utilizando o método de Euler Aperfeiçoado com $h = 0.1$ e $a = b = 1$.

(b) Dado $h > 0$, verifique que a aplicação do método de Euler produz os seguintes aproximações de $y(x_{n+1})$ para todo $n > 0$ (*Dica: utilize indução*):

$$y_{n+1} = (1 + ah)^{n+1} b + h\Big(\sum_{i=1}^{n} (1 + ah)^i\Big) + h.$$

Questão 4. Considere a equação diferencial $y'' = -yy' - 1$.

(a) Dado que $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$, determine aproximações para $y(0.2)$ e $y'(0.2)$ utilizando o método de Euler com $h = 0.1$.

(b) Sabendo-se que $y(0) + 3y'(0) = -1$ e $y(1) = 2$, obtenha um sistema de equações cuja solução aproxima $y(x)$ nos pontos $x_i = i/n$, $n > 0$, utilizando aproximações $O(h^2)$ das derivadas.

Fórmulas úteis:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \text{ onde } L_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$|E_n(x)| = \left| f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \text{ e } f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},\ x, \xi_x \in (x_0, x_n).$$

$$I \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\},\ I \approx \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\},$$

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ , \quad I \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

$$|E| \leq \frac{(b-a)\ h^2}{12} M_2,\ \ M_2 = \max_{x\in[a,b]}\ |f''(x)|$$

$$|E| \leq \frac{(b-a)\ h^4}{180} M_4,\ \ M_4 = \max_{x\in[a,b]}\ |f^{(IV)}(x)|$$

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))].$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y'(x_i) \approx -\frac{3y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{2h}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Boa Prova!