MS211, Cálculo Numérico, Turma E
Primeiro Semestre 2017, IMECC-UNICAMP

# Exercícios 5

(a) Provar que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_0, x_2, x_1]$ para $x_0, x_1, x_2$ qualquer. Verifique depois que $f[0, -1, 2] = f[-1, 0, 2] = f[0, 2, -1]$.

(b) Interpolar a função $f(x) = x^3 + x$ entre $[0, 1]$ usando uma reta e uma parábola passante pelos pontos $0, 0.5, 1$

- Determinar a expressão dos polinômios interpolantes (de grau 1 e 2) na forma de Lagrange e de Newton.
- Verificar que o erro de interpolação $E_n(x)$ no ponto $x = 3/4$ satisfaz a seguinte majoração

$$|E_n(x)| \leq \frac{\max_{0 \leq y \leq 1} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

e que

$$|E_n(x)| \leq \frac{\max_{0 \leq y \leq 1} |f^{(n+1)}(y)|}{4(n+1)} h^{n+1}$$

onde $h$ é o espaçamento entre os $n + 1$ nós utilizados.

(c) Um experimento físico dá logo aos seguintes valores $f(X)$ associados a dados $X$

| X | 0 | 0.1 | 0.4 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|
| f(X) | 2 | -3 | 1 | 4 |

Interpolar os dados da seguinte tabela para achar o valor do experimento em $x = 0.3$, usando um polinômio interpolador $p_2(x)$ e a spline linear $S_1(x)$.

- Determinar a expressão analítica do polinômio $p_2$ e da spline $S_1$.
- Supomos que a função $f$ tem derivadas em valor absoluto limitados do mesmo fator $M$ para qualquer ordem ate' 3. Qual é o interpolador melhor para achar o valor de $f$ em $x = 0.3$? Responde analisando a expressão do erro de interpolação.
- E' possível aproximar o máximo das derivadas de $f$ de ordem k através o máximo das diferenças divididas de ordem k que pode construir a partir dos nós de interpolação. Usando esta propriedade, aproxime o máximo das derivadas segundas e terças em $[0, 0.7]$. E compare usando estas aproximações, o erros obtido da interpolação com a spline $S_1$ e com o polinômio $p_2$. Qual dos dois métodos aproxima melhor o valor $f(0.3)$?

(d) Provar que $f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, use a expressão do polinômio $p_{n+1}$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.

(e) Aproximar o integral $I(f)$ de $f(x) = x^3 + x$ em $(0, 1)$ usando:

- Regra do retângulo a esquerda
- Regra do retângulo a direita
- Regra do trapézio
- Regra do ponto médio
- Regra de Simpson

Qual dos métodos em cima da a aproximação melhor de $I(f)$? Agora, motive a resposta analisando a expressão dos erros.

Considere agora também os métodos repetidos com quatro subdivisões ($\tilde{h} = 0.25$)

- Regra dos Trapézios compostos (repetidos)
- Regra de Simpson compostos (repetidos)

Qual destes dois métodos aproxima melhor $I(f)$? Classifique em ordem decrescente de acurácia todos os métodos descritos em cima.