MS211, Cálculo Numérico, Turma E
Primeiro Semestre 2017, IMECC-UNICAMP

Exercícios 4

(a) O método de Relaxação é uma variante do método iterativo de Gauss-Seidel :

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

com $0 < \omega < 2$ que é condição necessária pela convergência.

Nota se que o método de Gauss-Seidel obtém se para $\omega = 1$. Estes métodos permitem de escolher a ω_0 ótima (que e' aquela que minimiza o raio espectral da matriz de iteração) para que o método seja o mais rápido respeito aqueles associados a outras ω. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -7 \\ 4 & 5 & -3 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

e o vetor $b = [4\ 6\ 2]^t$. Provar que o método de relaxamento com $\omega_0 = 1.531281$ é mais rápido de Gauss-Seidel, usando poucas iteradas. Use que a solução teórica do sistema $Ax = b$ é $x = [1\ 1\ 1]^t$.

(b) Resolver o seguinte sistema usando três dígitos significativos através o método de Eliminação Direta sem pivotamento, com pivotamento parcial e com pivotamento completo.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & = & 5 \\ 10^3 x_1 + 5x_2 - 10x_3 & = & 990 \\ -2x_1 + 2\cdot 10^3 x_2 + 4x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Comparar os resultados obtidos. E verificar qual'e' a estratégia melhor.

(c) Verificar se o sistema linear do ponto anterior e o seguinte satisfazem a condição de convergência de Jacobi do sistema de ser diagonal dominante.

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 - 10x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - \frac{1}{2}x_3 & = & -3 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 & = & -5 \end{cases}$$

Implementar o método de Jacobi para ambos os sistemas e comparar as soluções obtidas com aquela teórica $x = [1\ -1\ 2]^t$.

(d) Avaliar se o critério de convergência de Sassenfeld é satisfeito nos seguintes sistemas a menos de permutação de colunas ou linas

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 & = & 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = & -2 \\ 7x_1 - 4x_2 + 0.5x_3 & = & 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 4 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 & = & -3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 0.5x_3 & = & 5 \end{cases}$$