MT704 - Lista 03

Prof. Christian Rodrigues

1. Estude a estabilidade das equações $x' = Ax$, onde as matrizes tem zeros do polinômiocaracterístico com parte real nula:

   Determine todas as soluções estáveis, assintoticamente estáveis e instáveis da equação:

   a) $x' = x(x-2)$

   b) $x'' + 4x = 0$

   Discuta a estabilidade da solução nula da equação:

   a) $\begin{cases} x' = -x + xy, \\ y' = x - y - x^2 - y^3; \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x' = -x + x^2 + y^2, \\ y' = 2x - 3y + y^3; \end{cases}$

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Seja $b \in \mathbb{R}$ uma constante. Considere os seguintes campos de vetores:

   a) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $F(x) = bx^3$.

   b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (-y + bx(x^2 + y^2), x + by(x^2 + y^2))$.

   Mostre que a solução $\gamma(t) = 0$ é estável mas não é assintoticamente estável para o campo de vetores linear $A = DF(0)$. Mostre que $\gamma(t) = 0$ é instável para o campo de vetores F se $b > 0$ e é assintoticamente estável de $b < 0$.

3. Mostre que para quaisquer valores positivos dos parâmetros s, r e b, existe $R > 0$ tal que $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, V(x, y, z) = rx^2 + sy^2 + s(z - 2r)^2$ é função de Lyapunov da **Equação de Lorenz**

$$\begin{cases} x' = -sx + sy \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

   no complementar da bola $B_R(0)$. Conclua que toda trajetória $f^t(x, y, z)$ da equação de Lorenz está definida para todo $t \in [0, +\infty)$ e todo ponto de acumulação quando $t \to +\infty$ está contido em $B_R(0)$.

4. Seja $F : U \to \mathbb{R}^d$ um campo vetorial de classe C^1. Uma função contínua $g : U \to \mathbb{R}$ é chamada integral primeira de F se ela for constante ao longo de trajetórias de F.

a) Mostre que se $g : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 então g é integral primeira de F se, e somente se, $Dg(x) \cdot F(x) = 0$ para todo $x \in U$

b) Mostre que se $p \in U$ é um ponto regular de F então existe uma vizinhança V de p tal que a restrição $F|V$ admite $d-1$ integrais primeiras $g_1, \ldots, g_{n-1}$ de classe C^1 tais que as derivadas $Dg_1(q), \ldots, Dg_{n-1}(q)$ são linearmente independentes em todo ponto $q \in V$.

c) Encontre uma integral primeira do centro dado por:

$$x_1' = -\beta x_2 \quad \text{e} \quad x_2' = \beta x_1, \quad \text{onde}\beta > 0.$$

5. Considere o sistema descrito por $x'' = -g \operatorname{sen} x$ ou

$$\begin{cases} x' = y' \\ y' = -g \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

a) Obtenha uma integral primeira.

b) Esboce o retrato de fases.

6. Utilizando o Teorema de Floquet, discuta a estabilidade de um sistema linearizado periódico, cuja solução fundamental pode ser escrita em termos de um atrator hiperbólico.