MT704 - Lista 02

Prof. Christian Rodrigues

1. Calcule e^{At} para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Mostre que $\det e^A = e^{trA}$, para todo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

3. Mostre que a matriz $d \times d$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é nilpotente. Para isto, escreva a matriz em termos dos vetores da base canônica e calcule N^2, N^3, para inferir N^d.

4. Dada N matriz nilpotente $d \times d$, definimos

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{N^j}{j} = N - \frac{N^2}{2} + \frac{N^3}{3} + \cdots \tag{1}$$

a) Verifique que (1) converge.

b) Mostre que $e^B = I + N$, onde I é a matriz identidade.

c) A que função matricial fazemos referência nos itens anteriores?

5. Dada a forma canônica de Jordan de um operador linear, mostre que $D_j N_j = N_j D_j$ tanto no caso real quanto no complexo.

6. Seja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ e defina

$$||A|| = \sup\{||A(v)|| : ||v|| \leq 1\}. \tag{2}$$

a) Mostre que (2) define uma norma completa em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

b) Verifique que se λ é autovalor (real ou complexo) de $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, então $|\lambda| < ||A||$.

7. Determine as condições necessárias e suficientes em termos de uma matriz $A \in M_n$ tais que para a equação $x' = Ax$:

a) todas as soluções são limitadas.

b) todas as soluções são limitadas para $t > 0$.

c) todas as soluções convergem para a origem.

8. Considere a equação

$$\begin{cases} x' = y(x^2 - 1) \\ y' = x(x^2 - 1). \end{cases}$$

Obtenha os pontos críticos e analise o retrato de fase.

9. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3}$$

a) Mostre que se $\langle f(x), x \rangle \leq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, então cada solução do problema (3) está definida para $t > t_0$.

b) Mostre que se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que

$$g(x) \geq ||x||^2 \quad \text{e} \quad \langle f(x), \nabla g(x) \rangle < 0$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, onde $||x||^2 = \langle x, x \rangle$ e ∇g é o gradiente de g, então cada solução do problema (3) está definida para $t > t_0$.

10. Construa uma conjugação topológica entre as soluções das equações:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -4y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = 3x \\ y' = -y \end{cases}$$

11. Considere as aplicações lineares $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -\pi & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule os fluxos das equações diferenciais lineares $x' = A_j x$, para $j = 1, 2, 3$.

b) Quais destes fluxos são topologicamente conjugados?

12. Verifique que para cada $k = 0, \ldots, d$ o conjunto dos campos de vetores lineares hiperbólicos com $dim E^s = k$ é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

13. Seja $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ um campo de vetores linear hiperbólico e $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$ a respectiva decomposição em espaço estável e instável. Mostre que existem $c > 0$ e alguma norma $||\cdot||$ em $\mathbb{R}^d$ tais que $||e^{tA}|E^s|| \leq e^{-ct}$ e $||e^{-tA}|E^s|| \leq e^{-ct}$ para todo $t > 0$.