MT704 - Lista 0

Prof. Christian Rodrigues

1. $d(x, y) = (x - y)^2$ define uma métrica no conjunto dos números reais?

2. Mostre que $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ define uma métrica no conjunto de todos os números reais.

3. Seja d uma métrica em um conjunto X. Determine e (demonstre) todas as constantes k, tais que

   a) kd é uma métrica em X;

   b) $d + k$ é uma métrica em X.

4. Seja $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função côncava com $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Mostre que, se $d(x, y)$ é uma métrica em um espaço M, então $f(d(x, y))$ também é uma métrica em M. Relacione este resultado com os exercício 2.

5. Considere o espaço das sequências, com a distância usual:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|},$$

   onde $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$. Mostre que é possível obter outra métrica substituindo $1/2^i$ por $z_i > 0$, tal que $\sum z_i$ converge.

6. Defina a distância de Hausdorff e mostre que ela pode munir o conjunto dos subconjuntos de um espaço métrico de uma métrica, o que por sua vez, se torna um espaço métrico. Defina distância de Hausdorff em termos de vizinhança de conjuntos.

7. Mostre que o produto cartesiano de dois espaços métricos pode ser munido de uma métrica.

8. Mostre que, em um espaço métrico:

   a) toda bola aberta é um conjunto aberto.

   b) toda bola fechada é um conjunto fechado.

9. Mostre que métricas equivalentes determinam a mesma topologia.

10. Mostre que, um subconjunto $A \subset M$ de um espaço métrico é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.

11. Mostre explicitamente que:

    a) todo espaço normado de dimensão finita n sobre $\mathbb{K}$ é isomorfo ao espaço obtido com a norma euclidiana $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_2)$.

b) se E e F forem espaços normados de mesma dimensão finita, sobre o mesmo corpo, então E e F serão isomorfos.

12. Considere o conjunto das matrizes reais $m \times n$ (com m e n fixos). Mostre que o espaço M formado por essas matrizes é isomorfo a algum $\mathbb{R}^d$.

13. Encontre ou demonstre que não existe uma constante de Lipschitz nos domínios indicados para:

    a) $f(t,x) = x^{1/3} \qquad |x| < 1.$

    b) $f(t,x) = 1/x \qquad 1 \leq x < \infty$