



1. Mostre que, se T for uma contração, então T^n , para $n \in \mathbb{N}$ será uma contração. Mas se T^n for uma contração para algum $n > 1$, então não necessariamente T será contração.
2. Dado um espaço métrico completo X e $g : X \rightarrow X$, mostre que se g for continuamente diferenciável e $|g'(x)| \leq k < 1$, onde k é a constante de Lipschitz, então $x_n = g(x_{n-1})$ converge.
3. Encontre todas condições iniciais tais que o problema do valor inicial $tx' = 2x, x(t_0) = x_0$
 - a) não tem solução;
 - b) mais de uma solução;
 - c) solução única.
4. Obtenha a Desigualdade de Schwarz da Desigualdade de Bessel.
5. Mostre que se $x \perp y$ em um espaço com produto interno, então

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

6. Seja (e_k) uma sequência ortonormal em um espaço com produto interno X . Mostre que para quaisquer $x, y \in X$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

7. Mostre que, em um espaço de Hilbert H , convergência de $\sum \|x_j\|$ implica convergência de $\sum x_j$.
8. Mostre que a equação diferencial de Legendre pode ser escrita como

$$[(1 - t^2)P_n']' = -n(n + 1)P_n. \quad (1)$$

Multiplicando a equação (1) por P_m . Em seguida, multiplique a correspondente equação obtida para P_m por $-P_n$ e some as duas equações. Integrando o resultado de -1 a 1 , mostre que (P_n) é uma sequência ortogonal em $L^2[-1, 1]$.

9. Mostre que o espaço dual do espaço das sequências reais ℓ^2 é o próprio ℓ^2 .
10. Mostre que todo espaço de Hilbert H é isomorfo ao seu bidual $H'' = (H')'$.
11. Verifique que o conjunto funções reais

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \quad g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \quad n \in \mathbb{N},$$

é um sistema ortonormal em $L^2[0, 2\pi]$.