MT401 - Lista 04

Prof. Christian Rodrigues

Entrega: 17 de novembro de 2022

1. Sejam E espaço de Banach, F espaço normado e $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$, tal que $T_n(x)$ é Cauchy em F para todo $x \in E$. Mostre que $(||T_n||)_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Dica: use o Teorema de Banach-Steinhaus.

2. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E é tal que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada para todo $f \in E'$, mostre que $(||x_n||)_{n=1}^{\infty}$ é limitada.

3. Seja V um espaço vetorial equipado com duas normas $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$. Mostre que, se existe uma constante $C > 0$ tal que $||v||_1 \leq C||v||_2$ para todo $v \in V$ e se V for completo com relação às duas normas, então estas normas são equivalentes. Dica: defina a aplicação identidade $I : (V, ||\cdot||_1) \to (V, ||\cdot||_2)$, mostre que está bem definida e utilize o Teorema da Aplicação Aberta para obter a conclusão.

4. Encontre a base dual da base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ para $\mathbb{R}^3$.

5. Dado um espaço vetorial normado E, tal que $dim(E) = n$, obtenha (demonstrando os passos) uma base para E' e a dimensão de E'.

6. Seja
$$c_0 = \left\{(a_j)_{j=1}^{j=\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } a_j \to 0\right\},$$
o conjunto das sequências escalares que convergem para zero. Mostre que o espaço ℓ^1 é isomorfo isometricamente a $(c_0)'$, ou seja, ao dual de c_0.

7. Seja $(x_j)_j^{\infty}$ uma sequência no espaço de Banach E tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty$ para todo $\varphi \in E'$. Mostre que $\sup_{||\varphi|| \leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty$. Dica:

   a) defina $u : E' \to \ell^1$ dado por $u(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$. Mostre que u está bem definido.

   b) Mostre que u tem gráfico fechado.

   c) Use o Teorema do Gráfico Fechado para concluir que u é contínuo.

   d) Use a continuidade de u para obter a conclusão desejada.

8. Seja E um espaço normado separável. Prove que existe uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em E', tal que para todo n e, para todo $x \in E$, $||x|| = \sup_n |\varphi_n(x)|$ no caso complexo e $||x|| = \sup_n \varphi_n(x)$ no caso real. Dica: reveja a demonstração da proposição que garante que *todo espaço normado separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de* ℓ^{∞} (feita em aula).

9. Se E é reflexivo, mostre que E' é reflexivo.

10. Sejam E um espaço normado e F um subespaço de E. Mostre que existe uma aplicação $T : F' \to E'$ injetora tal que $||T(\varphi)|| = ||\varphi||$ para todo funcional $\varphi \in F'$.