MT401 - Lista 03

Prof. Christian Rodrigues

Entrega: 06 de outubro de 2022

---

1. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade (i.e. um espaço de medida tal que $\mu(X) < \infty$). Dado $\varphi \in L^p(\mu)$, com $1 < p \leq \infty$, mostre que:
   $L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subset L^1(\mu)$.
   Dica: considere separadamente os casos $1 < p < \infty$ e $p = \infty$.

2. Mostre que se um espaço normado possui base de Schauder, então ele é separável.

3. Mostre que normas equivalentes em um espaço vetorial X induzem a mesma topologia.

4. Considere o conjunto das matrizes reais $m \times n$ (com m e n fixos).

   a) Mostre que o espaço M formado por essas matrizes formam um espaço vetorial mn-dimensional.

   b) Mostre que todas as normas em M são equivalentes.

   c) Descreva explicitamente as normas $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ e $||\cdot||_\infty$.

   d) M é isomorfo a algum $\mathbb{R}^d$? Prove se sim ou se não.

5. Prove que se E e F forem espaços normados de mesma dimensão finita, sobre o mesmo corpo, então E e F serão isomorfos.

6. Seja $T : E \to F$ um operador linear. Mostre que a imagem de um subespaço V de E é um espaço vetorial e a imagem inversa de um subestaço W de F também o é.

7. Seja o espaço vetorial das matrizes reais 2×2 e defina $T : E \to E$ por $Tx = bx$, onde $b \in E$ é fixo e bx denota a multiplicação usual de matrizes.

   a) Mostre que T é linear.

   b) Sob que condições existe T^{-1}?

8. Seja $\mathcal{P}(t)$ o espaço vetorial dos polinômios em um intervalo $[a, b]$. Podemos definir um operador (*derivação*) T agindo em $\mathcal{P}(t)$, dado por
   $$Tx(t) = x'(t),$$
   onde $x'(t)$ denota a derivada de $x(t)$.

   a) Mostre que T é linear.

   b) Existe T^{-1}?

9. Seja E e F espaços normados. Mostre que um operador linear $T : E \to F$ é limitado se, e somente se, leva conjuntos limitados de E em conjuntos limitados de F.