MT401 - Lista 02

Prof. Christian Rodrigues

Entrega: 22 de setembro de 2022

1. Mostre que $B[a,b]$, o espaço das funções limitadas no intervalo $[a,b]$, com $a < b$ não é separável.

2. Seja $M \subset l^\infty$ formado por todas as sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ com no máximo um número finito de termos não nulos.

   a) Encontre uma sequência de Cauchy em M que não converge em M, de modo que M não seja completo.

   b) Mostre que M não é completo utilizando o teorema que relaciona ser completo e ser subconjunto fechado.

3. Dois espaços métricos (X,d) e (Y,h) são ditos *isométricos* quando existir uma bijeção $T : X \to Y$, tal que,

$$d(x,y) = h(T(x),T(y)), \text{ para todo } \ x,y \in X.$$

   T é chamado *isometria*. Mostre que $C[0,1]$ e $C[a,b]$ são isométricos.

4. Considere s, o espaço das sequências e seja a distância usual:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}, \tag{1}$$

   onde $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$.

   a) Mostre que temos $x_n \to x$ se e somente se $x_i^{(n)} \to x_i$, para $i = 1,2,\ldots,$ onde $x_n = (x_i^{(n)})$ e $x = (x_i)$.

   b) Mostre que (s,d) é completo.

   c) A métrica (1) é obtida de uma norma?

   d) O espaço de sequências s pode ser espaço de Banach?

5. Mostre que é possível definir uma norma em qualquer espaço vetorial.

6. Seja X um conjunto não-vazio. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, ou seja, se existir $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ (apesar de termos usado $\mathbb{R}$, vale para um corpo $\mathbb{K}$). Sobre o conjunto $B(X)$ de todas as funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$, podemos definir a norma

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

   Mostre que $(B(X), ||\cdot||_\infty)$ é um espaço de Banach. Para isto,

   a) mostre que $B(X)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de funções.

b) mostre que $||\cdot||_\infty$ é uma norma.

c) tome uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy em $B(X)$ e verifique que para todo $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é Cauchy em $\mathbb{R}$ (ou mais geralmente em $\mathbb{K}$).

d) mostre que o resultado segue da completude de $\mathbb{R}$ (ou mais geralmente de $\mathbb{K}$).

7. * Considere o conjunto $\mathbb{N}$ e tome como σ-algebra o conjunto de suas partes, que denotaremos $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Podemos definir uma medida $\mu_c : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$, chamada *medida de contagem*, como

$$\mu_c = \begin{cases} |A| & \text{se A for finito} \\ +\infty & \text{se A for infinito} \end{cases}$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, onde $|A|$ denota a cardinalidade de A.

a) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função limitada não-negativa mensurável. Obtenha $\int_{\mathbb{N}} f d\mu_c$.
Dica:

- para $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$f_n(k) = \begin{cases} f(k) & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- mostre que se $n \to \infty$ então $f_n \to f$ pontualmente e a convergência é monótona. Por que?
- utilize o Teorema da Convergência Monótona para mostrar que $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu_c \to \int_{\mathbb{N}} f d\mu_c$.
- Note que $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \{n+1, n+2, \ldots\}$ e verifique que estes são conjuntos mensuráveis.
- Usando o fato de que f_n são constantes em cada um destes conjuntos, por definição, obtemos

$$\begin{aligned} \int f_n \, d\mu_c &= \int_{\{1\}} f_n \, d\mu_c + \cdots + \int_{\{n\}} f_n \, d\mu_c + \int_{\{n+1, n+2, \ldots\}} f_n \, d\mu_c \\ &= \int_{\{1\}} f_n(1) \, d\mu_c + \cdots + \int_{\{n\}} f_n(n) \, d\mu_c + \int_{\{n+1, n+2, \ldots\}} 0 \, d\mu_c, \end{aligned}$$

- mostre que $\int f_n \, d\mu_c = 1 \cdot f_n(1) + 1 \cdot f_n(2) + \cdots + 1 \cdot f_n(n) + 0 = f(1) + \cdots + f(n)$.
- finalmente utilize $\int f \, d\mu_c = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu_c$ para concluir.

Para $1 \leq p < \infty$, verifique que:

b) os espaços l^p são na verdade os espaços $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ e as operações usuais de funções se transformam nas operações usuais de sequências.

c) a norma $|| \cdot ||_p$ se transforma em

$$||(a_j)_{j=1}^{\infty}||_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

d) l^p é espaço de Banach com esta norma?

8. Utilizando o resultado do exercício anterior

d) obtenha a desigualdade de Hölder para sequências.

e) obtenha a desigualdade de Minkowski para sequências.