



1. $d(x, y) = (x - y)^2$ define uma métrica no conjunto dos números reais?
2. Mostre que $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ define uma métrica no conjunto de todos os números reais.
3. Seja d uma métrica em um conjunto X . Determine e (demonstre) todas as constantes k , tais que
 - a) kd é uma métrica em X ;
 - b) $d + k$ é uma métrica em X .
4. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função côncava com $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Mostre que, se $d(x, y)$ é uma métrica em um espaço M , então $f(d(x, y))$ também é uma métrica em M . Relacione este resultado com os exercício 2.
5. Considere o espaço das sequências, com a distância usual:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|},$$

onde $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$. Mostre que é possível obter outra métrica substituindo $1/2^i$ por $z_i > 0$, tal que $\sum z_i$ converge.

6. Defina a distância de Hausdorff e mostre que ela pode munir o conjunto dos subconjuntos de um espaço métrico de uma métrica, o que por sua vez, se torna um espaço métrico. Defina distância de Hausdorff em termos de vizinhança de conjuntos.
7. Mostre que o produto cartesiano de dois espaços métricos pode ser munido de uma métrica.
8. Mostre que, em um espaço métrico:
 - a) toda bola aberta é um conjunto aberto.
 - b) toda bola fechada é um conjunto fechado.
9. Mostre que, um subconjunto $A \subset M$ de um espaço métrico é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.
10. Dados dois espaços métricos, M e N , mostre que:
 - a) o conjunto das aplicações limitadas descontínuas é aberto no conjunto das aplicações limitadas de M em N .

b) o conjunto das aplicações contínuas limitadas é um subconjunto fechado no conjunto das aplicações limitadas de M em N .

11. Dada uma sequência (x_n) convergente no espaço métrico X com limite x , mostre que toda subsequência (x_{n_k}) de (x_n) é convergente e tem o mesmo limite x .
12. Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada.
13. Ser limitada garante que a sequência seja de Cauchy? E que convirja?
14. Se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em um espaço métrico (X, d) , mostre que (a_n) , com $a_n = d(x_n, y_n)$ converge. Dê exemplos.