MT401 - Lista 01

Prof. Christian Rodrigues

Entrega: 24 de março de 2020

---

1. $d(x, y) = (x - y)^2$ define uma métrica no conjunto dos números reais?

2. Mostre que $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ define uma métrica no conjunto de todos os números reais.

3. Seja d uma métrica em um conjunto X. Determine e (demonstre) todas as constantes k, tais que

   a) kd é uma métrica em X;

   b) $d + k$ é uma métrica em X.

4. Seja $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função côncava com $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Mostre que, se $d(x, y)$ é uma métrica em um espaço M, então $f(d(x, y))$ também é uma métrica em M. Relacione este resultado com os exercício 2.

5. Considere o espaço das sequências, com a distância usual:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|},$$

   onde $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$. Mostre que é possível obter outra métrica substituindo $1/2^i$ por $z_i > 0$, tal que $\sum z_i$ converge.

6. Defina a distância de Hausdorff e mostre que ela pode munir o conjunto dos subconjuntos de um espaço métrico de uma métrica, o que por sua vez, se torna um espaço métrico. Defina distância de Hausdorff em termos de vizinhança de conjuntos.

7. Mostre que o produto cartesiano de dois espaços métricos pode ser munido de uma métrica.

8. Mostre que, em um espaço métrico:

   a) toda bola aberta é um conjunto aberto.

   b) toda bola fechada é um conjunto fechado.

9. Mostre que, um subconjunto $A \subset M$ de um espaço métrico é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.

10. Mostre que a interseção de um número infinito de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto.

11. O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado ou aberto em $\mathbb{Q}$?

12. O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado ou aberto em $\mathbb{R}$?

13. Mostre que todo espaço métrico é aberto em si mesmo.

14. Seja X um subconjunto do espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ é dito *ponto de acumulação* de X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X, *diferente de* a. O conjunto dos pontos de acumulação de X em M é denotado por X'. Mostre que, dado $X \subset M$, tem-se $\bar{X} = X \cup X'$.

15. Dados dois espaços métricos, M e N, mostre que:

    a) o conjunto das aplicações limitadas descontínuas é aberto no conjunto das aplicações limitadas de M em N.

    b) o conjunto das aplicações contínuas limitadas é um subconjunto fechado no conjunto das aplicações limitadas de M em N.

16. Dada uma sequência (x_n) convergente no espaço métrico X com limite x, mostre que toda subsequência (x_{n_k}) de (x_n) é convergente e tem o mesmo limite x.

17. Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada.

18. Ser limitada garante que a sequência seja de Cauchy? E que convirja?

19. Se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em um espaço métrico (X, d), mostre que (a_n), com $a_n = d(x_n, y_n)$ converge. Dê exemplos.