MS519 - Lista 02

Prof. Christian Rodrigues

Entrega: 12 de abril de 2019

1. Mostre explicitamente que:

   a) todo espaço normado de dimensão finita n sobre $\mathbb{K}$ é isomorfo ao espaço obtido com a norma euclidiana $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_2)$.

   b) se E e F forem espaços normados de mesma dimensão finita, sobre o mesmo corpo, então E e F serão isomorfos.

2. Considere o conjunto das matrizes reais $m \times n$ (com m e n fixos). Mostre que o espaço M formado por essas matrizes é isomorfo a algum $\mathbb{R}^d$.

3. Encontre ou demonstre que não existe uma constante de Lipschitz nos domínios indicados para:

   a) $f(t,x) = x^{1/3}$ $\quad |x| < 1.$

   b) $f(t,x) = 1/x$ $\quad 1 \leq x < \infty$

4. Seja $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{|y|}$. Considere a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ com condição inicial $y(0) = 0$.

   a) Dê uma solução desta equação (utilize o método de separação de variáveis).

   b) Ela é única?

   c) Caso a resposta de b) seja negativa, contradiz o Teorema de Picardi? Justifique.

5. Prove o Teorema 6 utilizando o Teorema 5 (apresentados em aula).

6. Prove o corolário do Teorema 5 enunciado em aula: se G for C^k nas variáveis x e μ, então $(t,\mu) \mapsto \gamma_\mu(t)$ é C^k em μ.

7. Considere a equação diferencial:
$$\begin{cases} x'' = -g sen(x) \\ x'(t_0) = v_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
   e denote $\gamma_{t_0,x_0,v_0,g}$ sua solução maximal. Mostre que

   a) $\gamma_{t_0,x_0,v_0,g}$ está definida para todo $t \in (-\infty, \infty)$.

   b) $(t, t_0, x_0, v_0, g) \mapsto \gamma_{t_0,x_0,v_0,g}(t)$ é C^∞ em $\mathbb{R}^5$.

8. Seja $G : V \to \mathbb{R}^d$, $(t,x,\mu) \mapsto G(t,x,\mu)$ contínua e C^1 na segunda e terceira variáveis, com V aberto de $\mathbb{R}^{1+d+p}$. Seja D o conjunto de (t,μ), tal que t pertença ao domínio da solução maximal φ_μ de
$$\begin{cases} x' = G(t,x,\mu) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dado $\mu_0 \in D$, mostre que:

$$\varphi(t, t_0, x_0, \mu) = \varphi(t, t_0, x_0, \mu_0) + \partial_\mu \varphi(t, t_0, x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) + \rho(\mu - \mu_0),$$

onde $\rho(\mu - \mu_0)$ tende a zero uniformemente quando $\mu \to \mu_0$ em subconjuntos compactos de D contendo μ_0. Este fato é útil para encontrar expressões aproximadas de soluções em torno de algum parâmetro.