MS519 - Lista 01

Prof. Christian Rodrigues

Entrega: 26 de março de 2019

1. $d(x, y) = (x - y)^2$ define uma métrica no conjunto dos números reais?
2. Mostre que $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ define uma métrica no conjunto de todos os números reais.
3. Seja d uma métrica em um conjunto X. Determine e (demonstre) todas as constantes k, tais que

   a) kd é uma métrica em X;

   b) $d + k$ é uma métrica em X.
4. Seja $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função côncava com $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Mostre que, se $d(x, y)$ é uma métrica em um espaço M, então $f(d(x, y))$ também é uma métrica em M. Relacione este resultado com os exercício 2.
5. Defina a distância de Hausdorff e mostre que ela pode munir o conjunto dos subconjuntos de um espaço métrico de uma métrica, o que por sua vez, se torna um espaço métrico. Defina distância de Hausdorff em termos de vizinhança de conjuntos.
6. Mostre que o produto cartesiano de dois espaços métricos pode ser munido de uma métrica.
7. Mostre que, em um espaço métrico:

   a) toda bola aberta é um conjunto aberto.

   b) toda bola fechada é um conjunto fechado.
8. Mostre que, um subconjunto $A \subset M$ de um espaço métrico é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.