Gabarito P3 - Noturno

Q1) O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ ao longo da curva $\gamma(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ será:

$$\tau = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

0,9

Temos $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ e

0,2

com a parametrização da curva temos:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\vec{i} + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\vec{j} \right] \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

0,9

Q2

A massa total será a densidade integrada em toda a superfície: 0,3

$M = \iint_S f(x,y,z)\, dS$. Assim

$M = \iint_S (x+y+z)\, dS = \iint_D (2u+3v) \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| du\,dv,$

onde D é dado por $0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1.$ 0,5

Temos

$$\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \quad e$$ 0,3

$\left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$. Então 0,3

$$M = \sqrt{6} \iint_D (2u+3v)\, du\,dv = \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^1 (2u+3v)\, dv\, du$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{2}$$ 0,6

2

Questão 3

Dado um campo $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, recorde que, para uma superfície S dada como gráfico $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$, vale

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA.$$

0,8

Aplicando ao presente caso, temos

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_{[0,1]\times[0,1]} (-xy.e^y - 4x^2.xe^y + yxe^x)\, dA$$

0,6

$$= -4\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^3 e^y \, dA$$

0,3

$$= -4\int_0^1\int_0^1 x^3 e^y \, dx\, dy$$

$$= -\int_0^1 e^y \, dy = 1 - e.$$

0,3

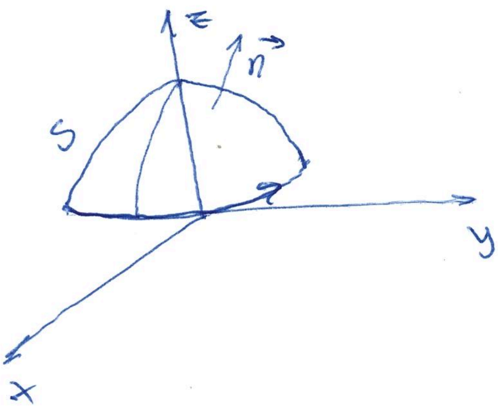
Q4

Pelo Teorema de Stokes temos

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

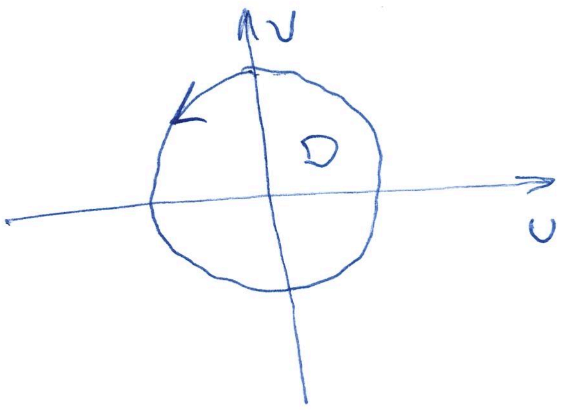
0,3

Vemos que a superfície S é dada como um paraboloide nas variáveis u e v cujas projeções nos planos zx e zy descrevem parábolas com concavidade negativa:



Pela "regra da mão direita", por exemplo, a orientação de C compatível com S é dada na figura.

0,5



Podemos parametrizar C por $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

D é o círculo $u^2 + v^2 \leq 1$.

0,5

Assim, temos

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[\text{sen}\,t\,\vec{i} + (\cos t + \text{sen}\,t)\,\vec{k}\right]\cdot\left[-\text{sen}\,t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\text{sen}^2 t)\,dt$$

0,4

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = -\pi$$

0,3

Q5

Queremos obter o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S que delimita o sólido E. Pelo teorema do divergente,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F \, dV ,$$ 0,3

onde E é o sólido dado por $x^2 + y^2 = 1$ e $x \geq 0,\ y \geq 0$ e $0 \leq z \leq 2$. 0,3

Como

$$\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left(x^4 \vec{i} - x^3 z^2 \vec{j} + 4xy^2 z \vec{k} \right)$$

$$= 4x^3 + 4xy^2 = 4x(x^2 + y^2).$$ 0,2

Então:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E 4x(x^2 + y^2)\, dV$$

Em coordenadas cilíndricas:

$x = r\cos\theta$ com $0 \leq r \leq 1$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$z = z$ $0 \leq z \leq 2$ 0,2

Temos

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{1}\int_0^{2} 4(r\cos\theta)\, r^2\, (r)\, dz\, dr\, d\theta$$ 0,4

$$= \left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\right)\left(4\int_0^{1} r^4\, dr\right)\left(\int_0^{2} dz\right)$$ 0,3

$$= \left(\operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\pi/2}\right)\left(\frac{4}{5}r^5\Big|_0^{1}\right)\left(z\Big|_0^{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{8}{5}$$ 0,3