GABARITO
MA211 – PROVA 3
Sexta-feira (noite), 01/12/2017.

*Para correção, cada símbolo "✓**x**" o item que o antecede vale **x** pontos.*

Resolução da Questão 1.

O trabalho é calculado através da integral de linha do campo vetorial:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt \checkmark \mathbf{0.4} = \int_0^{2\pi} \langle t, \cos^2 t, 12\sin t\rangle \cdot \langle \cos t, -\sin t, \frac{1}{6}\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(t\cos t - \sin t\cos^2 t + 2\sin t\right) dt$$

A 1ª parcela da integral se resolve por partes:

$$u = t \qquad dv = \cos t dt \qquad du = dt \qquad v = \sin t$$

implicando em

$$\int t\cos t dt = uv - \int v du = t\sin t - \int \sin t dt = t\sin t + \cos t + K$$

A 2ª se resolve por substituição:

$$u = \cos t \qquad du = -\sin t dt$$

e então

$$\int \sin t \cos^2 t dt = -\int u^2 du = -\frac{\cos^3 t}{3} + K$$

Juntando todas as partes temos

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left[t\sin t + \cos t + \frac{\cos^3 t}{3} - 2\cos t\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}) = 0. \checkmark \mathbf{1.6}$$

Resolução da Questão 2.

A inspeção do gráfico nos permite concluir que a orientação positiva da curva começa em $t = \sqrt{3}$ e termina em $t = \sqrt{3}$✓ **0.4**

A área então é calculada pelo Teorema de Green:

$$A = \int_C x dy \checkmark \mathbf{0.4} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(t^2-1)dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^4 - t^2)dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{5} - \sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5} - \sqrt{3} = \frac{18\sqrt{3}}{5} - 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{5}. \checkmark \mathbf{1.2}$$

Resolução da Questão 3.

Temos que no caso

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA \checkmark \mathbf{0.4} = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 16y^2} dA$$

sendo D a elipse

$$D = \{(x, y) : 4x^2 + 16y^2 \leq 1\} \checkmark \mathbf{0.2}$$

Inicialmente, fazemos uma mudança de variáveis:

$$u = 2x \qquad v = 4y \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{u}{2} \qquad y = \frac{v}{4}$$

cujo Jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \checkmark \mathbf{0.2}$$

Assim, a integral se torna

$$\frac{1}{8} \iint_D \sqrt{1 + u^2 + v^2} dA$$

sendo

$$D = \{(x, y) : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Em coordenadas polares, temos:

$$\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta.$$

Agora, fazemos a substituição

$$w = 1 + r^2 \Rightarrow dw = 2rdr.$$

Deste modo, a integral se torna

$$A = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{w} dw d\theta = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} w^{3/2}\right]_{w=1}^{w=2} d\theta = \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} (\sqrt{8} - 1) d\theta = \frac{1}{24} \left[(2\sqrt{2} - 1)\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{\pi}{12}(2\sqrt{2} - 1). \checkmark \mathbf{1.2}$$

Resolução da Questão 4.

A fronteira da superfície está na intersecção de um plano com uma elipse. A elipse tem equação paramétrica

$$x(t) = \cos t \qquad y(t) = 2\sin t$$

Da equação do plano:

$$z = x + y + 2 \Rightarrow z(t) = \cos t + 2\sin t + 2.$$

Assim, temos a parametrização da curva:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + (\cos t + 2\sin t + 2)\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi. \checkmark \mathbf{0.4}$$

Há que se notar porém que esta parametrização é induzida por um vetor normal apontando para cima. Assim, para a aplicação correta do Teorema de Stokes, devemos inverter o sinal. ✓**0.2**

Temos então pelo Teorema de Stokes:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \checkmark \mathbf{0.4} = -\int_0^{2\pi} \langle 2\sin t, \cos t, \cos^2 t + 2\cos t \sin t + 2\cos t \rangle \cdot \langle -\sin t, 2\cos t, -\sin t + 2\cos t \rangle \, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t + 2\cos^2 t + [-\cos^2 t \sin t - 2\cos t \sin^2 t - 2\cos t \sin t + 2\cos^3 t + 4\cos^2 t \sin t + 4\cos^2 t])dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t + 6\cos^2 t + 3\cos^2 \sin t - 2\cos t \sin^2 t - 2\cos t \sin t + 2\cos^3 t)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (-1 + \cos 2t + 3 + 3\cos 2t + 3\cos^2 \sin t - 2\cos t \sin^2 t - 2\cos t \sin t + 2[1 - \sin^2 t]\cos t)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (2 + 4\cos 2t + 3\cos^2 \sin t - 4\cos t \sin^2 t - \sin 2t + 2\cos t)dt.$$

As integrais envolvendo sin e cos se resolvem por substituição:

$$u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt \Rightarrow \int \cos^2 t \sin t dt = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + K = -\frac{\cos^3 t}{3} + K$$

$$u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt \Rightarrow \int \sin^2 t \cos t dt = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + K = \frac{\sin^3 t}{3} + K$$

Juntando as partes temos que a integral resulta em

$$-\left[2t + 2\sin 2t - \cos^3 t - \frac{4}{3}\sin^3 t + \frac{1}{2}\cos 2t + 2\sin t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -\left(4\pi - 1 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = -4\pi. \checkmark \mathbf{1.0}$$

Resolução da Questão 5.

Dentro de qualquer superfície fechada S_2, contendo a origem, sempre podemos definir uma superfície esférica S_1 de raio a centrada na origem (desde que a seja suficientemente pequeno).✓**0.4**

Dentro do sólido E compreendido entre S_1 e S_2 podemos aplicar o Teorema do Divergente, já que ali as derivadas do campo são contínuas.

O campo no caso é

$$\mathbf{F} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}.$$

Inicialmente, calculamos o divergente:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0. \checkmark \mathbf{0.6}$$

A integral de superfície nesta situação é a soma das integrais sobre S_1 e S_2, porém com sinais trocados, já que o normal de S_1 aponta para dentro.

Pelo Teorema do Divergente:

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = 0.$$

Isto implica finalmente que

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}. \checkmark \mathbf{0.4}$$

Resta-nos agora calcular a integral sobre S_1. Note que as derivadas (e o divergente consequentemente) apresentam uma descontinuidade na origem, o que impede a aplicação direta do Teorema do Divergente.

Podemos porém calcular pela definição. Parametrização da esfera:

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = a\sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + a\sin\phi\sin\theta\mathbf{i} + a\cos\phi\mathbf{k}$$

Produto vetorial que aparece no elemento de área:

$$\mathbf{r}_\phi = a\cos\phi\cos\theta\mathbf{i} + a\cos\phi\sin\theta\mathbf{j} - a\sin\phi\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -a\sin\phi\sin\theta\mathbf{i} + a\sin\phi\cos\theta\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = a^2(\sin^2\phi\cos\theta\mathbf{i} + \sin^2\phi\sin\theta\mathbf{j} + \cos\phi\sin\phi\mathbf{k})$$

Note-se também que o denominador de cada componente de $\mathbf{F}$ na parametrização esférica se torna

$$(x^2+y^2+z^2)^{3/2} = (a^2\sin^2\phi\cos^2\theta + a^2\sin^2\phi\sin^2\theta + a^2\cos^2\phi)^{3/2}$$

$$(a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi)^{3/2} = a^3.$$

Assim, pela definição:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{a^3} \langle a \sin\phi \cos\theta, a \sin\phi \sin\theta, a \cos\phi \rangle \cdot \left\langle a^2 \sin^2\phi \cos\theta, a^2 \sin^2\phi \sin\theta, a^2 \cos\phi \sin\phi \right\rangle d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin^3\phi \cos^2\theta + \sin^3\phi \sin^2\theta + \cos^2\phi \sin\phi) d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin^3\phi + \cos^2\phi \sin\phi) d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} ([1 - \cos^2\phi] \sin\phi + \cos^2\phi \sin\phi) d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} [-\cos\phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta = [2\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 4\pi. \checkmark \mathbf{0.6}$$