Gabarito das Questões Propostas

Q1)

Usando coordenadas cilíndricas: o cilindro expesso e o cone são descritos por, respectivamente:

$$1 \leq r \leq \sqrt{2} \quad \text{e} \quad z = r.$$ 0,5

Assim, a massa do sólido é dado por

$$M = \iiint_E \rho(x,y,z)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{r} K r^2 \,dz\,dr\,d\theta$$ 0,8

$$= K\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} r^3\,dr\,d\theta$$ 0,2

$$= \frac{3}{4}K\int_0^{2\pi} d\theta$$ 0,3

$$= \frac{3}{2}K\pi$$ 0,2

Q2) Vamos utilizar coordenadas esféricas e computar a integral de $f(x,y,z) = 9 - x^2 - y^2$ em meia esfera. Ou seja, como $r^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi$ 0,4

temos

$$I = \iiint_H (9 - x^2 - y^2)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 (9 - \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

0,6

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^3 (9\rho^2 - \rho^4 \operatorname{sen}^2\phi)\, d\rho\, d\phi$$

Mas

0,1

$$\boxed{\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi} \quad \text{e} \quad \int_0^3 (9\rho^2 - \rho^4 \operatorname{sen}^2\phi)\, d\rho = \left(\frac{9}{3}\rho^3 - \frac{1}{5}\rho^5 \operatorname{sen}^2\phi\right)\Bigg|_0^3$$

$$= \frac{81}{5}(5 - 3\operatorname{sen}^2\phi)$$

0,2 0,3

Então:

$$I = 2\pi\, \frac{81}{5} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi (5 - 3\operatorname{sen}^2\phi)\, d\phi = 2\pi \frac{81}{5}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi (2 + 3\cos^2\phi)\, d\phi$$

Tomando $u = \cos\phi$, $du = -\operatorname{sen}\phi\, d\phi$:

$$I = -2\pi \frac{81}{5}\int_1^0 (2 + 3u^2)\, du = 2\pi \frac{81}{5}(2u + u^3)\Big|_0^1 = 2\pi \frac{81}{5}(3)$$

0,3

0,1 $= \frac{486}{5}\pi$.

2

Q3 Vamos fazer a seguinte mudança de variáveis: $u = x - y$, $v = x + y$. Assim

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \\ y = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \end{cases}$$ 0,3

Temos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$ 0,3

Então

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\,du\,dv$$ 0,3

Observe que nas novas coordenadas temos os limites de integração: $v = 1$, $v = 2$, $v = u$, $v = -u$. 0,3

Assim

$$I = \iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} v} \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv$$ 0,3

Como $\int_{-v}^{v} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} v}\,du = \left[\frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v}\right]_{u=-v}^{u=v} = 2$ 0,3

Temos

$$\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}\,dx\,dy = \int_1^2 dv = 1$$ 0,2

Q4 Em coordenadas polares, queremos a área em toda a região onde o raio é descrito pela função dada e o ângulo equivalente a uma volta completa. Ou seja: 0,2

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 1\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{1+\cos\theta} d\theta$$

0,8 0,2

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

0,2

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

0,3

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta + 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

0,2

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

0,1

Q5 Vamos utilizar coordenadas esféricas. A área corresponde a integral de uma função identicamente 1 em toda superfície com raio constante igual a R. 0,6

Ou seja $\rho = R$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$ 0,6

$$= R^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi$$ 0,2

$$= R^2 \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\phi)\Big|_0^{\pi}$$ 0,2

$$= R^2 \cdot 2\pi \cdot 2$$ 0,2

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$ 0,2

(5)