GABARITO
MA211 – PROVA 2
Sexta-feira (noite), 20/10/2017.

*Para correção, cada símbolo "$\checkmark$**x**" o item que o antecede vale **x** pontos.*

Resolução da Questão 1. Jacobiano da transformação:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8. \checkmark \mathbf{0.4}$$

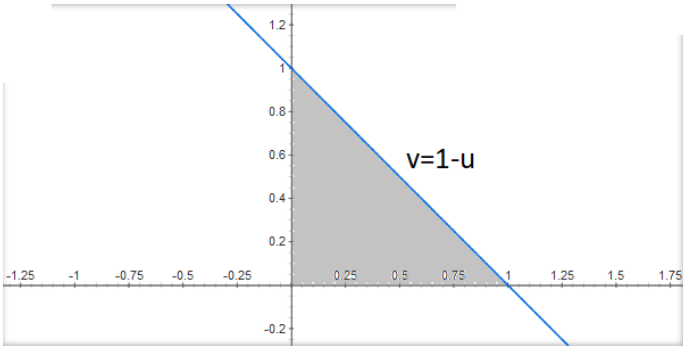
Isolamos u multiplicando a 1ª equação por 3 e subtraindo a 2ª. Isolamos v multiplicando a 2ª equação por 3 subtraindo a 1ª:

$$u = \frac{3x - y}{8} \qquad v = \frac{3y - x}{8} \checkmark \mathbf{0.4}$$

Os vértices de D no plano uv são portanto

$$A = (0,0) \qquad B = (0,1) \qquad C = (1,0)$$

A integral no plano uv se torna então



$$\int_0^1 \int_0^{1-u} (-u - 11v) 8 dv du \checkmark \mathbf{0.4} = -8 \int_0^1 \left[uv + \frac{11}{2} v^2 \right]_{v=0}^{v=1-u} du$$

$$= -8 \int_0^1 \left(u - u^2 + \frac{11}{2} - 11u + \frac{11}{2} u^2 \right) du = -8 \int_0^1 \left(\frac{9}{2} u^2 - 10u + \frac{11}{2} \right) du$$

$$= -8 \left[\frac{9}{6} u^3 - 5u^2 + \frac{11}{2} u \right]_{u=0}^{u=1} = -8\,(2) = -16. \checkmark \mathbf{0.8}$$

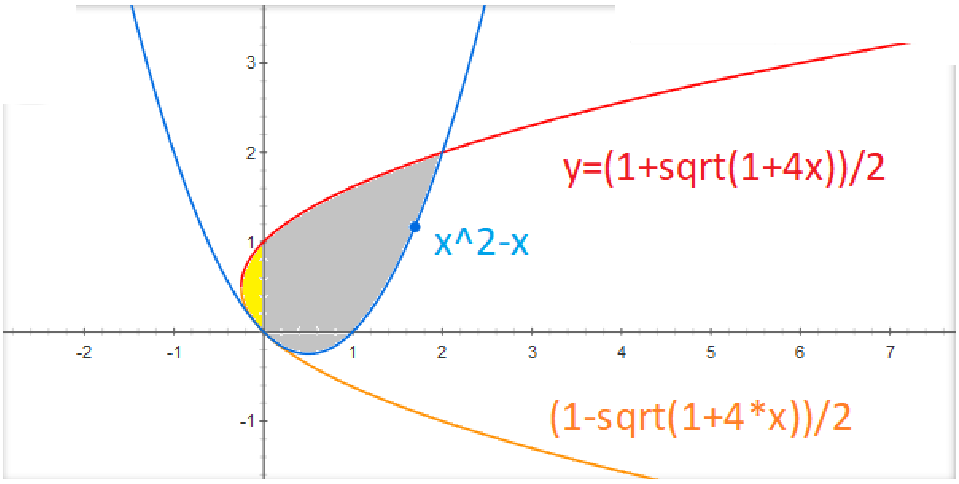
Resolução da Questão 2. A segunda curva pode ser reescrita usando-se Bhaskara:

$$y^2 - y - x = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$$

Há duas opções para esta curva:

$$y = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \qquad y = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$$

Graficamente: A intersecção entre as curvas pode ser obtida substituindo-se a 1ª equação na 2ª:



$$x = (x^2-x)^2 - (x^2-x) \Rightarrow (x(x-1))(x(x-1)) - x(x-1) - x = 0$$

$$\Rightarrow x[(x-1)x(x-1) - (x-1) - 1] = 0 \Rightarrow x[x^3 - 2x^2 + x - x + 1 - 1] = 0 \Rightarrow x[x^2(x-2)] = 0.$$

Portanto as curvas se cruzam em $x = 0$ e $x = 2$, mais precisamente nas coordenadas

$$(0,0) \qquad (2,2)$$

Já a curva vermelha intercepta o eixo y em $y = 1$. A região pode ser quebrada em duas partes: D_1 (cinza) e D_2 (amarelo), de modo que

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, x^2 - x \le y \le \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\} \checkmark \mathbf{0.4}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^2 - y\} \checkmark \mathbf{0.4}$$

Área é fornecida pela integral dupla na 1ª região:

$$A_1 = \iint_{D_1} 1dA = \int_0^2 \int_{x^2-x}^{\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}} dydx \checkmark \mathbf{0.2} = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2} - x^2 + x \right) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{\sqrt{1+4x}}{2} dx + \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - x^2 + x \right) dx$$

Resolvemos a 1ª integral por substituição

$$u = 1 + 4x \qquad dx = \frac{du}{4}$$

implicando que

$$\int \frac{\sqrt{1+4x}}{2} dx = \frac{1}{8} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{12}(1+4x)^{3/2} + C$$

Voltando à área:

$$A_1 = \left[\frac{1}{12}(1+4x)^{3/2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{27}{12} + 1 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{12} = \frac{5}{2}.$$

Já para a 2ª região:

$$A_2 = \iint_{D_2} 1 dA = \int_0^1 \int_{y^2-y}^{0} dxdy = \int_0^1 (y - y^2)dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{6}. \checkmark \mathbf{0.8}$$

Área total:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}. \checkmark \mathbf{0.2}$$

Resolução da Questão 3. Integral iterada:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_{x-y}^{x+y}\cos z dz dy dx = \checkmark\mathbf{0.6}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left[\sin z\right]_{z=x-y}^{z=x+y} dy dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(\sin(x+y)-\sin(x-y))dy dx = \int_0^{\pi/2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]_{y=0}^{y=\pi/2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}(\cos(x-\pi/2)-\cos(x+\pi/2)-\cos(x)+\cos(x))dx$$

$$= \left[\sin(x-\pi/2)-\sin(x+\pi/2)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} = 2.\checkmark\mathbf{1.4}$$

Resolução da Questão 4. O volume pode ser obtido por

$$\iiint\limits_E 1dV \checkmark \mathbf{0.2}$$

Como a região E de integração está contida em um cilindro (simétrica em relação ao eixo z) é natural que se usem coordenadas cilíndricas. Assim a integral iterada se torna

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-4}^{r^2+1} 1dzrdrd\theta \checkmark \mathbf{0.6} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 [z]_{z=-4}^{z=r^2+1} rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2+5)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4+\frac{5}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} 14d\theta = [14\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 28\pi. \checkmark \mathbf{1.2}$$

Resolução da Questão 5. Fazemos uma mudança de variáveis:

$$u = \frac{x}{a} \qquad v = \frac{y}{b} \qquad w = \frac{z}{c}\checkmark\mathbf{0.4}$$

com inversa

$$x = au \qquad y = bv \qquad z = cw$$

Jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.\checkmark\mathbf{0.4}$$

O elipsoide no espaço uvw é a esfera

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1,$$

que corresponde em coordenadas esféricas ao conjunto de pontos

$$\{(\rho,\theta,\phi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}\checkmark\mathbf{0.2}$$

O volume é obtido pela integral tripla com mudança de variáveis:

$$abc \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi \checkmark\mathbf{0.4} = abc \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta d\phi$$

$$\frac{abc}{3} \int_0^\pi \sin\phi \, [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \, d\phi = \frac{2\pi}{3} abc \, [-\cos\phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi} = \frac{4\pi}{3} abc.\checkmark\mathbf{0.6}$$