MA211 2018/02 – Gabarito P1 Noite

Q1

(a) Primeiramente, vamos calcular as derivadas parciais u_x e u_{xx}.
Pela regra da cadeia, temos que

$u_x = f'(x+at) + g'(x-at)$ e $u_{xx} = f''(x+at) + g''(x-at)$. 0.4

Similarmente, pela regra da cadeia temos que as derivadas parciais u_t e u_{tt} satisfazem

$u_t = af'(x+at) - ag'(x-at)$ e $u_{tt} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at)$. 0.4

Finalmente, temos que

$u_{tt} = a^2(f''(x+at) + g''(x-at)) = a^2 u_{xx}$ 0.2

de onde concluímos que u satisfaz a equação da onda.

(b) Temos que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$ 0.2

$$\frac{du}{dt} = 2x \cdot \cos t - 4y \cdot e^t + 3z^2 \cdot 3.$$ 0.6

Substituindo x, y e z, temos

$$\frac{du}{dt} = 2 \operatorname{sen} t \cos t - 4e^t e^t + 9(3t)^2 = \operatorname{sen} 2t - 4e^{2t} + 81t^2$$ 0.2

Q2

Temos que maximizar a função $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$ tal que os pontos sejam vinculados por $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos

$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$

No caso, $\nabla f = (3, -2, 1)$ e $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

Então, $(3, -2, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z)$, ou seja, temos o sistema de equações

$$3 = 2\lambda x, \quad -2 = 2\lambda y, \quad 1 = 2\lambda z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$ 1.0

Substituindo $x = \frac{3}{2\lambda}$, $y = \frac{-1}{\lambda}$ e $z = \frac{1}{2\lambda}$ no vínculo, temos

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 14 \quad \text{de onde temos } \lambda^2 = 1/4 \text{ ou } \lambda = \pm 1/2.$$ 1.0

Caso 1: $\lambda = 1/2$, temos $x = 3, y = -2, z = 1$ e $3x - 2y + z = 9 + 4 + 1 = 14$.
Caso 2: $\lambda = -1/2$, temos $x = -3, y = 2, z = -1$ e $3x - 2y + z = -9 - 4 - 1 = -14$.

Logo, o máximo é atingido em: $(3, -2, 1)$. 1.0

Q3

A direção em que a temperatura decresce mais rapidamente é a de derivada direcional tomada na direção oposta ao vetor gradiente, ou seja,

$-\nabla f(x, y, z) \quad$ no ponto $\quad (\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$. 0.5

Ou seja,

$\nabla f(x, y, z) = (6x, -10y, 4z)$, aplicado ao ponto, $\nabla f = (2, -2, 2) = 2(1, -1, 1)$.

Assim, para que a temperatura decreça mais rapidamente, devemos caminhar na direção do vetor $(-1, 1, -1)$. 1.5

Q4

Primeiramente, vamos encontrar os pontos críticos.

Note que

$f_x = 3x^2 - 3y \quad$ e $\quad f_y = 3y^2 - 3x$.

Com $f_x = 0$ e $f_y = 0$ temos $x^2 = y$ e $y^2 = x$, ou seja, $y^4 = y$, de modo que $y = 0$ ou $y = 1$.

Então os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(1, 1)$. 1.0

Vamos fazer o teste da segunda derivada.

Observe que

$f_{xy} = -3, \quad f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y$.

Visto que as segundas derivadas parciais são contínuas na vizinhança dos pontos críticos, consideramos

$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

Em $(0, 0)$ obtemos $D(0, 0) = -9 < 0$.

Portanto, $(0, 0)$ não é nem ponto de máximo local e nem ponto de mínimo local, tratando-se de um ponto de sela.

Em $(1, 1)$ obtemos $D(1, 1) = 27 > 0$ e temos $f_{xx} = 6 > 0$.

Portanto, $(1, 1)$ é ponto de mínimo local. 1.0

(5) $f(x,y) = x\exp\left(\frac{x}{y}\right)$. Mostre que os planos tangentes de f passam pela origem.

Primeiramente note que f é diferenciável em todo seu domínio. Consideramos $(x_0,y_0) \in \text{Dom} f$. Então:

$$z_0 = f(x_0,y_0) = x_0 \exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 1 \cdot \exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0}{y_0}\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = \left(1+\frac{x_0}{y_0}\right)\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$$ 0,2

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0 \exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\left(-\frac{x_0}{y_0^2}\right) = -\frac{x_0^2}{y_0^2}\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$$ 0,2

Eq. Plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0,y_0,z_0):

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$ 0,2

$$(*) \quad z - x_0\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = \left(1+\frac{x_0}{y_0}\right)\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)(x-x_0) - \frac{x_0^2}{y_0^2}\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)(y-y_0)$$

0,1

Vamos mostrar que $(0,0,0)$ é solução da equação $(*)$.

Por um lado, temos no 1º membro: $0 - x_0\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = -x_0\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$.

Por outro lado, o segundo membro temos:

$$\left(1+\frac{x_0}{y_0}\right)\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)(-x_0) - \frac{x_0^2}{y_0^2}\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right)(-y_0)$$

$$= -x_0\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right) - \frac{x_0^2}{y_0}\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0^2}{y_0}\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = -x_0\exp\left(\frac{x_0}{y_0}\right).$$

Portanto, $(0,0,0)$ pertence ao plano tangente.

0,3