GABARITO
MA211 – EXAME
Segunda-feira (noite), 11/12/2017.

*Para correção, cada símbolo "✓**x** " o item que o antecede vale* $\mathbf{x}$ *pontos.*

Resolução da Questão 1.

Sabemos que a derivada direcional de f na direção de $\mathbf{u}$ pode ser calculada por

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \checkmark \mathbf{0.4}$$

em que o gradiente se define por

$$\nabla f = \partial_x f \mathbf{i} + \partial_y f \mathbf{j}. \checkmark \mathbf{0.2}$$

Note que no caso $|\mathbf{u}_1| = 1$ e $|\mathbf{u}_2| = 1$, de modo que

$$1 = (\partial_x f, \partial_y f) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \checkmark \mathbf{0.4}$$

$$-2 = (\partial_x f, \partial_y f) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \checkmark \mathbf{0.4}$$

Desenvolvendo o produto escalar e multiplicando por $\sqrt{2}$ temos:

$$\sqrt{2} = \partial_x f - \partial_y f,$$

$$-2\sqrt{2} = \partial_x f + \partial_y f.$$

Somando e subtraindo estas equações obtemos

$$\partial_x f = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \partial_y f = -\frac{3}{\sqrt{2}}. \checkmark \mathbf{0.6}$$

Resolução da Questão 2.

Primeiramente, identificamos os pontos críticos no interior do disco (satisfazem a desigualdade), que são obtidos das derivadas de 1ª ordem:

$$f_x = 8x \Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$f_y = 20y \Rightarrow 20y = 0 \Rightarrow y = 0$$

O único ponto que satisfaz a desigualdade é então $(0, 0)$. ✓**0.6**

Agora, olhamos para a igualdade e aplicamos neste caso os multiplicadores de Lagrange com a restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Temos então o sistema

$$\begin{cases} 8x = 2\lambda x \\ 20y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.6}$$

Da 1ª equação temos

$$2x(4 - \lambda) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } \lambda = 4.$$

Se $x = 0$, a restrição nos dá $y = \pm 2$.

Se $\lambda = 4$, a 2ª equação dá

$$20y = 8y \Rightarrow y = 0$$

e então a restrição fornece $x = \pm 2$.

A 2ª equação fornece valores idênticos.

O método de Lagrange provê então os seguintes valores: $(0, 2), (0, -2), (2, 0), (-2, 0)$. ✓**0.4**

Para identificar máximos e mínimos, juntamos os valores fornecidos por Lagrange com o ponto crítico e calculamos o valor da função nestes pontos:

$f(0, 0) = 0$	Mínimo	
$f(2, 0) = f(-2, 0) = 16$		✓**0.4**
$f(0, 2) = f(0, -2) = 40$	Máximo	

Resolução da Questão 3.

Em coordenadas esféricas no 1º octante:

$$\iiint\limits_E (x+y+z)dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (\rho\sin\phi\cos\theta + \rho\sin\phi\sin\theta + \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \checkmark \mathbf{0.6}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (\rho^3\sin^2\phi\cos\theta + \rho^3\sin^2\phi\sin\theta + \rho^3\sin\phi\cos\phi)d\rho d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(\sin^2\phi\cos\theta + \sin^2\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\phi)d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\cos\theta + \frac{1-\cos 2\phi}{2}\sin\theta + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\phi\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\phi\cos\theta + \frac{1}{2}\phi\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 2\phi\sin\theta - \frac{1}{4}\cos 2\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta + \frac{\pi}{4}\sin\theta + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4}\sin\theta - \frac{\pi}{4}\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}. \checkmark \mathbf{1.4}$$

Resolução da Questão 4.

(a) Os componentes do campo são

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2},$$

de modo que P e Q NÃO são diferenciáveis em $(0,0)$, ou seja, não são diferenciáveis em todo lugar dentro da região delimitada por C.

Fora da origem temos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Assim, o Teorema de Green não pode ser aplicado diretamente. ✓**0.2**

Devemos calcular então pela definição, adotando a parametrização de C:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Assim:

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t)dt + \cos t(\cos t)dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi. \checkmark \mathbf{0.3} \tag{1}$$

(b) A elipse está fora do círculo do item (a). Tomemos então a região D entre a elipse e o círculo.

P e Q SÃO diferenciáveis em D pois esta evita o único ponto "problemático" que é a origem. ✓**0.4**

Podemos então aplicar o Teorema de Green em D e sua fronteira C':

$$\int_{C'} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D 0dA = 0. \checkmark \mathbf{0.4} \tag{2}$$

C' é composta por duas curvas: C_1 (elipse externa) e C_2 (círculo interno).

Porém, para que o Teorema de Green possa ser corretamente aplicado a uma região com furo, devemos considerar que as orientações tanto da curva mais externa quanto da interna devem ser tais que a região de interesse esteja sempre à esquerda. ✓**0.4**

Para isso, C_1 é orientada no sentido anti-horário e C_2 no sentido horário. E então

$$\int_{C'} Pdx + Qdy = \int_{C_1} (Pdx + Qdy) + \int_{C_2} (Pdx + Qdy).$$

Mas a integral sobre C_2 é exatamente a que calculamos em (1), porém com sinal negativo, já que aquela era calculada no sentido anti-horário. Logo:

$$\int_{C'} Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy - 2\pi.$$

Sabemos porém de (2) que

$$\int_{C'} Pdx + Qdy = 0.$$

Assim:

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = 2\pi. \checkmark \mathbf{0.3}$$

Resolução da Questão 5.

Temos que $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\text{rot } \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3y^2 & 4z & 6x \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6y\mathbf{k}. \checkmark \mathbf{0.4}$$

Temos também que $\mathbf{r}(u,v)$ está definida em

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0,2], v \in [0, 2-u]\},$$

e deste modo

$$\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}. \checkmark \mathbf{0.4}$$

Pelo Teorema de Stokes:

$$\int_{\partial E} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \iint_E \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot [\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)] dS$$

$$= \iint_D (-4, -6, 6v) \cdot (0, -\frac{1}{2}, 1) dS = \iint_D (3 + 6v) dS$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2-u} (3+6v) dv \right) du = \int_0^2 (18 - 15u + 3u^2) du = 14. \checkmark \mathbf{1.2}$$