

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

**Uma introdução aos sistemas dinâmicos: tempo
contínuo e tempo discreto**

Relatório Final de Atividades

Aluno: André Boscarol Rasesa, RA: 231312

Orientador: Ricardo Miranda Martins

Campinas, SP

02/09/2022

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 2 |
| 2 | Metodologia | 2 |
| 3 | Resumo das Atividades | 2 |
| 3.1 | Sistemas Dinâmicos de Tempo Contínuo | 2 |
| 3.1.1 | Sistemas de EDOs Lineares | 2 |
| 3.1.2 | Bifurcação de Hopf | 3 |
| 3.1.3 | Teorema do Fluxo Tubular | 6 |
| 3.1.4 | Teorema de Poincaré-Bendixson | 7 |
| 3.2 | Sistemas Dinâmicos de Tempo Discreto | 9 |
| 3.2.1 | Conjunto dos Terços Médios de Cantor | 9 |
| 3.2.2 | A Família Quadrática | 11 |
| 3.2.3 | Dinâmica Simbólica | 13 |
| 3.2.4 | Caos | 16 |
| 3.2.5 | Teorema de Sarkovskii | 18 |
| 4 | Conclusão | 19 |

1 Introdução

Um sistema dinâmico pode ser descrito como uma ação de um grupo G em uma variedade diferenciável X , isto é, uma função $\psi: G \times X \rightarrow X$ que associa a cada par ordenado (g, x) um elemento $\psi(g, x) \in X$. Neste projeto, os estudos foram desenvolvidos em duas frentes, considerando dois casos particulares dessa definição:

- O primeiro é chamado “sistema dinâmico de tempo contínuo”, em que $G = \mathbb{R}$ e $X = \mathbb{R}^n$ para algum natural n , e a função ψ é tomada como a solução da equação diferencial autônoma $\dot{x} = X(x)$, de forma que $\{\psi_t(x_0) : t \in I \subseteq \mathbb{R}\}$ é a solução da equação com condição inicial $x(0) = x_0$.
- O segundo é chamado “sistema dinâmico de tempo discreto”, em que $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}^n$, e a função ψ é descrita por $\psi(n, x) = T^n(x)$, e T é um difeomorfismo. Um caso mais geral, em que X é um espaço métrico e T é uma função contínua também foi bastante explorado.

Quanto aos sistemas dinâmicos de tempo contínuo, foram estudados a princípio os sistemas de equações diferenciais lineares, passando em seguida para o estudo de fluxos induzidos por equações diferenciais no plano e considerando o conceito de bifurcação. Depois, foi analisado o Teorema do Fluxo Tubular e sua demonstração, que emprega importantes teoremas de ponto fixo, e por fim foram exploradas condições para a existência de órbitas periódicas nesses sistemas, utilizando o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Quanto aos sistemas dinâmicos de tempo discreto, foram estudados em particular os sistemas unidimensionais (quando $X = \mathbb{R}^1$), com especial ênfase à aplicação quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$, avaliando seu comportamento ao variar o parâmetro c em \mathbb{R} . Fazendo uso de dinâmica simbólica, foi construída a noção de caos, baseada no comportamento do shift map no espaço das sequências. Ao fim, foi destrinchado o Teorema de Sarkovskii, resultado historicamente muito importante para o desenvolvimento da dinâmica unidimensional.

2 Metodologia

A metodologia deste projeto consistiu em estudar e consultar referências variadas, listadas ao final deste relatório, tais como livros e notas de aula, reescrevendo e completando as demonstrações e argumentos e fazendo diversos exercícios. Foram realizadas reuniões semanais com o orientador para discutir os resultados, tirar dúvidas e planejar os próximos passos.

3 Resumo das Atividades

3.1 Sistemas Dinâmicos de Tempo Contínuo

3.1.1 Sistemas de EDOs Lineares

Para iniciar os estudos de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, foram explorados os sistemas de equações diferenciais lineares e suas soluções analíticas utilizando a Forma Canônica de Jordan e a exponencial de matrizes [9, 10]. De fato, com essas ferramentas é possível descrever explicitamente as soluções dos sistemas com relativa facilidade: em particular, a classificação dos sistemas planares (sistemas 2×2) a menos de isomorfismos lineares é simples e foi minuciosamente explorada.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz com entradas reais. Seu polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Abreviando $T = \text{tr}(A)$ e $D = \det(A)$, os autovalores (as raízes do polinômio característico) são

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Dependendo dos valores que T e D assumem, os autovalores são números reais distintos, ou o mesmo real repetido, ou números complexos conjugados.

Definição 1. Denote $M_n(\mathbb{R})$ para o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Sejam A e $B \in M_n(\mathbb{R})$. A e B são ditas semelhantes se existe uma matriz invertível $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Teorema 2. Seja $M \in M_2(\mathbb{R})$. Considere as seguintes matrizes:

$$(1) \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}, \quad (3) \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (4) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

- Se M possui autovalores reais distintos λ e μ , então M é semelhante à matriz (1);
- Se M possui apenas um autovalor real repetido η cujo autoespaço possui dimensão 2, então M é semelhante à matriz (2);
- Se M possui apenas um autovalor real repetido γ cujo autoespaço possui dimensão 1, então M é semelhante à matriz (3);
- Se M possui dois autovalores complexos conjugados $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$, então M é semelhante à matriz (4).

A partir desse teorema, é possível avaliar o comportamento das soluções do sistema de equações diferenciais $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, considerando apenas os casos acima, a menos de semelhança matricial (ou equivalentemente, como supracitado, a menos de transformações lineares invertíveis). Essa análise está esquematizada no chamado “Diagrama Traço-Determinante”, representado na Figura 1 na página seguinte, baseada em [6].

Esse estudo acompanhou a parte inicial do curso de Álgebra Linear Avançada, reforçando os conceitos a respeito das formas canônicas dos operadores lineares, além de ter sido o primeiro contato com a interpretação qualitativa do retrato de fase de um sistema, essencial para o estudo da dinâmica em tempo contínuo.

3.1.2 Bifurcação de Hopf

Iniciando os estudos em não-linearidade, o assunto seguinte abordou os sistemas de EDOs não lineares unidimensionais e bidimensionais [7]. Se a análise anterior foi feita a menos de transformações lineares invertíveis entre sistemas, a partir daqui a análise passou a ser feita a menos de funções contínuas invertíveis (homeomorfismos) definidas nas vizinhanças dos pontos de interesse entre retratos de fase. Quando uma tal função existe de um sistema em outro, os dois são chamados “localmente topologicamente equivalentes”.

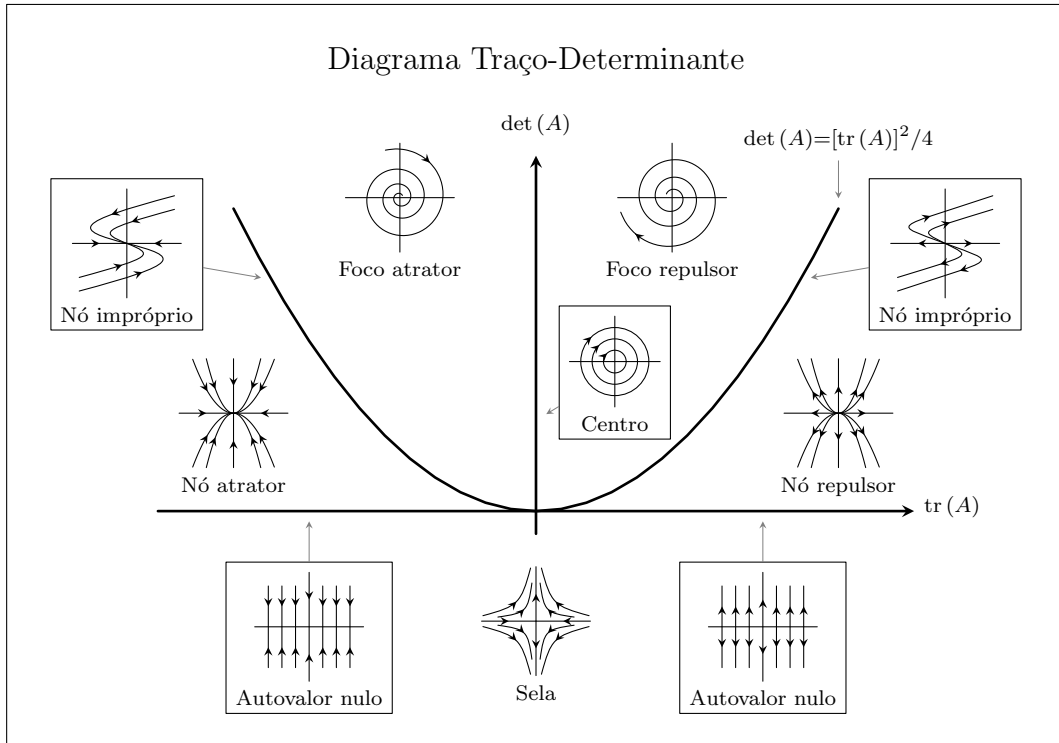


Figura 1: Classificação dos sistemas de EDOs lineares planares.

Os pontos de interesse nesse contexto são os chamados pontos de equilíbrio ou singularidades.

Definição 3. *Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que Ω é um aberto, e considere o sistema $\dot{x} = f(x)$. O ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto de equilíbrio se $f(x_0) = 0$. Note que, nesse caso, $x(t) = x_0$ é solução do sistema e sua trajetória é um ponto.*

Definição 4. *Acrescente ao sistema um parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}^m$, isto é, considere a função $f: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o sistema associado $\dot{x} = f(x, \alpha)$. A aparição de sistemas não localmente topologicamente equivalentes numa vizinhança de um certo ponto ao variar o parâmetro é chamada bifurcação.*

Nos sistemas não lineares em que f é diferenciável, sua parcela linear (sua matriz jacobiana) é muito relevante no retrato de fase próximo à origem. A classificação dos sistemas lineares planares descrita na seção anterior permite constatar que surgem diferenças topológicas significativas quando os autovalores da matriz associada têm o sinal de sua parte real alterado. De fato, no contexto de sistemas não lineares, esse comportamento se repete: no contexto unidimensional, a bifurcação estudada é chamada sela-nó; no contexto bidimensional, é chamada bifurcação de Hopf. Através de várias transformações contínuas e invertíveis e reparametrizações, foram destrinchados os seguintes teoremas, que descrevem o comportamento dessas bifurcações:

Teorema 5 (Forma Normal da Bifurcação Sela-Nó). *Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que o sistema $\dot{x} = f(x, \alpha)$ apresenta, para valores suficientemente*

pequenos de $|\alpha|$, um ponto de equilíbrio $x = 0$, e seja

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Se vale que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} \neq 0,$$

então o sistema é localmente topologicamente a uma das formas normais da bifurcação sela-nó próximo à origem:

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2,$$

em que β é um real que depende apenas de α .

Teorema 6 (Forma Normal da Bifurcação de Hopf). *Seja $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável. Suponha que o sistema $\dot{x} = f(x, \alpha)$ apresenta, para valores suficientemente pequenos de $|\alpha|$, um ponto de equilíbrio $x = 0$ com autovalores da matriz jacobiana*

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

em que $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Defina $\beta(\alpha) = \mu(\alpha)/\omega(\alpha)$. Se o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1(\beta)$ é tal que $l_1(0) \neq 0$ e $\mu'(0) \neq 0$, então o sistema é localmente topologicamente equivalente a uma das formas normais da bifurcação de Hopf próximo à origem:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Segue abaixo um dos exercícios realizados aplicando o **Teorema 6**.

Exercício 7 (Exercício (5)(b) da seção 3.6 de [7]). *Mostre que a equação de Rayleigh exibe bifurcação de Hopf para algum α e calcule o primeiro coeficiente de Lyapunov:*

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 - 2\alpha\dot{x} + x = 0.$$

Solução. Chame $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ e construa o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2^3 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \quad F((x_1, x_2), \alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2^3 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $A(\alpha)$ são $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Para $|\alpha| < 1$, os autovalores são complexos e $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha) = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2}$.

Em particular, em $\alpha = 0$, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio e $\lambda(0) = i$, $\overline{\lambda(0)} = -i$. Assim, $\omega_0 = 1 > 0$ e o sistema exibe uma bifurcação de Hopf em $\alpha = 0$.

Para calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov, escolha um autovetor $q(\alpha)$ relativo a $\lambda(\alpha)$: $q(\alpha) = [\overline{\lambda(\alpha)} \quad 1]^T$ é uma possibilidade. Em particular, $q = q(0) = [-i \quad 1]^T$.

Para escolher $p(\alpha)$, observe que $p_1(\alpha) = -\lambda(\alpha)p_2(\alpha)$ e, para que o sinal de $l_1(0)$ seja preservado, $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$. Resolvendo o sistema linear, tem-se que

$$p_1(\alpha) = -\frac{\lambda(\alpha)}{1 - \lambda(\alpha)^2} \quad \text{e} \quad p_2(\alpha) = \frac{1}{1 - \lambda(\alpha)^2}.$$

Em particular, $p = p(0) = [-i/2 \quad 1/2]^T$.

Construa agora as funções multilineares B e C . Como F não possui termos de ordem 2, é evidente que $B = 0$. Por outro lado,

$$\left. \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2^3}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = -6.$$

Assim,

$$C(x, y, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6x_2y_2u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow C(q, q, \bar{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, $g_{20} = g_{11} = 0$ e $g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3$. Então, $ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21} = 0 + 1 \cdot (-3) = -3 \Rightarrow l_1(0) = 1/2 \cdot (-3) = -3/2$.

É evidente que $\mu'(0) = 1 \neq 0$. Aí, ambas as condições do **Teorema 6** estão satisfeitas e o sistema é, de fato, localmente topologicamente equivalente à forma normal da bifurcação de Hopf próximo à origem (os métodos aqui empregados estão todos descritos em [7]). ■

3.1.3 Teorema do Fluxo Tubular

O tópico seguinte explorou um contexto mais geral: o estudo de equações diferenciais ordinárias autônomas n -dimensionais e seu fluxo [2, 13, 14]. Como preparação, foram estudadas algumas noções de espaços métricos, tais como a métrica do supremo, que torna o conjunto das funções contínuas definidas num compacto contido em \mathbb{R}^n num espaço métrico completo, e um teorema de ponto fixo, o chamado Lema de Contração.

Com essas ferramentas, foi demonstrado o Teorema de Picard-Lindelöf, resultado que garante a existência e a unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, com grande generalidade.

Definição 8. *Uma função $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita Lipschitziana em Ω relativamente à segunda da variável se existe $K \in \mathbb{R}$, $K \geq 0$, tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 9 (Teorema de Picard-Lindelöf). *Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, defina*

$$I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\} \quad \text{e} \quad B_b = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\},$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana em \mathbb{R}^n .

Sejam $\Omega = I_a \times B_b$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua que também satisfaz a definição acima. Logo, f é limitada, isto é, existe $M \geq 0$ tal que $\|f(t, x)\| \leq M$ para todo $(t, x) \in \Omega$. Então,

existe uma única solução para

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

em I_α , em que $\alpha = \min \{a, b/M\}$.

Continuando essa mesma abordagem empregando espaços métricos, foram estudados outros resultados, como o Lema de Grönwall e o Teorema de Contração nas Fibras, ferramentas para demonstrar a diferenciabilidade da variação das condições iniciais de um sistema de equações diferenciais.

Teorema 10. *Se a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 num aberto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ a função $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$, em que $\varphi(\cdot, x_0)$ é a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

é de classe C^1 em uma vizinhança de (t_0, x_0) .

Esses resultados permitem demonstrar, numa elegante aplicação do Teorema da Função Implícita, o resultado principal dessa etapa.

Teorema 11 (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado um ponto $p \in D$ com $f(p) \neq 0$, existe uma mudança de coordenadas $y = g(x)$ numa vizinhança de p transformando a equação $x' = f(x)$ na equação $y' = v$ para algum $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Intuitivamente, o **Teorema 11** indica que uma vizinhança de um ponto regular (que não é singularidade) de um campo vetorial C^1 é topologicamente equivalente a um campo constante: as trajetórias podem ser “esticadas”. Esse resultado justifica a afirmação feita na seção anterior, recorrente no estudo de sistemas dinâmicos contínuos, de que os pontos de interesse frequentemente são os pontos singulares do campo vetorial.

3.1.4 Teorema de Poincaré-Bendixson

O último tópico desta introdução a sistemas dinâmicos de tempo contínuo foi o Teorema de Poincaré-Bendixson, que estabelece condições suficientes para a existência de órbitas periódicas em sistemas de equações diferenciais planares [11, 14].

Para demonstrar este teorema, foram introduzidos os ômega e alfa limites e estudadas algumas de suas propriedades topológicas.

Definição 12. *Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que Ω é um aberto, e considere o sistema $x' = f(x)$, de condição inicial $x(0) = x_0$. Denote sua solução por $\varphi(t, x_0)$, como no teorema anterior. Seja $x \in \Omega$ tal que $\varphi(t, x)$ está definida para todo $t \geq 0$. O ômega-limite de x é o conjunto*

$$\omega(x) = \left\{ y \in \Omega : \exists (t_n) \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x) = y \right\}.$$

De forma similar, se $\varphi(t, x)$ está definida para todo $t \leq 0$, o alfa-limite de x é o conjunto

$$\alpha(x) = \left\{ y \in \Omega : \exists (t_n) \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x) = y \right\}.$$

O ômega-limite de uma órbita é o ômega-limite de qualquer um de seus pontos (o mesmo vale para o alfa-limite).

O **Teorema 11** garante a existência local de uma seção transversal para o campo vetorial; a partir da existência da seção transversal e do Teorema da Curva de Jordan em \mathbb{R}^2 , é possível demonstrar o resultado fundamental dessa seção.

Teorema 13 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Dado $x \in \Omega$, denote Γ para a órbita correspondente. Suponha que $\omega(x)$ está definido, a semi-órbita positiva $\Gamma^+ = \{\varphi(t, x) : t \geq 0\}$ está contida em um compacto $X \subset \Omega$ e $\omega(\Gamma)$ não possui singularidades. Então, $\omega(\Gamma)$ é uma órbita periódica do sistema. Analogamente, se $\alpha(x)$ está definido, se a semi-órbita negativa $\Gamma^- = \{\varphi(t, x) : t \leq 0\}$ está contida em um compacto $X \subset \Omega$ e se $\alpha(\Gamma)$ não possui singularidades, $\alpha(\Gamma)$ é uma órbita periódica do sistema.*

O teorema foi utilizado para garantir a existência de órbitas periódicas no exercício a seguir:

Exercício 14 (Exercício 1.(a) e (b) da seção 3.7 de [11], adaptado). *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(r^4 - 3r^2 + 1), \\ \dot{y} &= x + y(r^4 - 3r^2 + 1), \end{aligned}$$

em que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mostre que $\dot{r} < 0$ no círculo $r = 1$ e que $\dot{r} > 0$ no círculo $r = 2$. Use o Teorema de Poincaré-Bendixson e o fato de que o único ponto crítico desse sistema é a origem para mostrar que existe uma órbita periódica na região anelar $A_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 < |\mathbf{x}| < 2\}$. Use ideia semelhante para mostrar que existe uma outra órbita periódica na região $A_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < |\mathbf{x}| < 1\}$.

Solução. Repare que $\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y})/r$.

Caso $r = 1$, $\dot{x} = -y - x$ e $\dot{y} = x - y$. Aí, $\dot{r} = -(x^2 + y^2)/r = -r = -1 < 0$. Caso $r = 2$, $\dot{x} = -y + 5x$ e $\dot{y} = x + 5y$. Então, $\dot{r} = 5(x^2 + y^2)/r = 5r = 10 > 0$.

Considere uma curva integral qualquer Γ cujo valor inicial ($t = 0$) está em A_1 , isto é, $1 < r(0) < 2$. Suponha, por absurdo, que, para algum $t_0 < 0$, $r(t_0) \geq 2$. Como r é contínua, existe $\delta < 0$ tal que $t \in (\delta, 0] \Rightarrow r(t) < 2$. Defina o conjunto $I = \{\delta < 0 : r(t) < 2 \forall t \in (\delta, 0]\}$ e tome $t_1 = \inf I$. Como na demonstração do Teorema do Valor Intermediário, é fácil verificar que $r(t_1) = 2$.

Assim, $\dot{r}(t_1) > 0$ e existe uma vizinhança de t_1 na qual r é estritamente crescente; tome $t_2 < 0$ nessa vizinhança tal que $t_1 < t_2$. Naturalmente, $2 = r(t_1) < r(t_2)$. Mas aí, novamente empregando o valor intermediário, existe t_3 satisfazendo $t_1 < t_2 < t_3 < 0$ tal que $r(t_3) = 2$, contradizendo a definição de t_1 : t_3 é cota inferior de I maior que $t_1 = \inf I$. O mesmo argumento vale para mostrar que, para uma trajetória de valor inicial em A_1 , a função r não pode assumir valores menores ou iguais a 1 para valor negativos de t .

Dessa forma, Γ^- está contida em A_1 . Para empregar o Teorema de Poincaré-Bendixson, basta considerar o compacto $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |\mathbf{x}| \leq 2\}$. Como não há pontos críticos nessa região, que evidentemente contém $\alpha(\Gamma)$, existe uma órbita periódica em X . Segue imediatamente da contradição desenvolvida no parágrafo anterior que tal órbita está em A_1 .

Quanto à região anelar A_2 , veja que $\dot{r} < 0$ quando $r = 1$, de forma que argumento completamente análogo ao empregado acima também funciona neste caso, estudando a semi-órbita positiva Γ^+ de uma trajetória cujo valor inicial está em A_2 e seu ômega-limite, demonstrando que há uma outra órbita periódica. Utilizando o software Mathematica para esboçar as trajetórias, veja que esse resultado é aparente na Figura 2 a seguir. ■

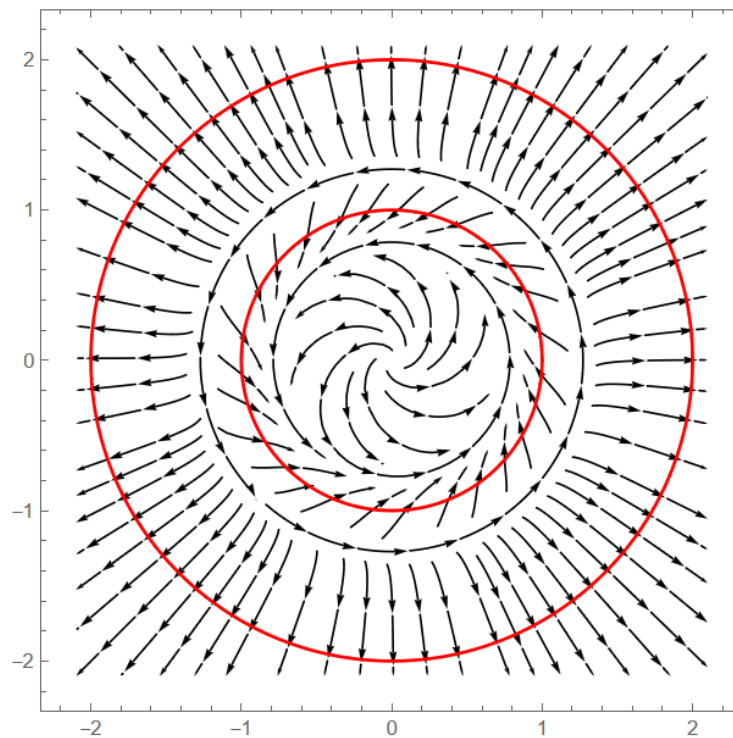


Figura 2: Trajetórias do sistema estudado neste exercício. As circunferências em vermelho possuem raio 1 e 2.

3.2 Sistemas Dinâmicos de Tempo Discreto

3.2.1 Conjunto dos Terços Médios de Cantor

Partindo agora para os sistemas dinâmicos em tempo discreto unidimensionais, os estudos dessa segunda parte foram iniciados investigando as diferentes formas de se definir o conjunto dos terços médios de Cantor e suas propriedades topológicas [12, 15].

Definição 15. *Sejam $G_0, G_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$G_0(x) = \frac{1}{3}x \quad e \quad G_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Defina indutivamente \mathcal{K}_n , $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{K}_0 = [0, 1]$ e, supondo \mathcal{K}_k definido, construa

$$\mathcal{K}_{k+1} = G_0(\mathcal{K}_k) \cup G_2(\mathcal{K}_k).$$

O conjunto dos terços médios de Cantor é $\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n$.

Teorema 16. Seja $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \leq \frac{1}{2}, \\ -3x + 3 & \text{se } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Então, $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R} : T^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$. Além disso, para cada $x \in [0, 1]$, considere sua expansão ternária (que não é única)

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n},$$

em que cada $x_n \in \{0, 1, 2\}$. Segue que \mathcal{K} é igual ao conjunto dos elementos de $[0, 1]$ que possuem alguma expansão ternária cujos elementos são todos diferentes de 1.

Segue abaixo um exercício realizado durante o estudo desse resultado.

Exercício 17 (Exercício 6.1 de [15]). Prove que \mathcal{K} é o único conjunto limitado e fechado de \mathbb{R} que satisfaz

$$\mathcal{K} = G_0(\mathcal{K}) \cup G_2(\mathcal{K}).$$

Solução. Suponha que K satisfaz as hipóteses acima. Comece observando que $K \subseteq [0, 1]$: por contradição suponha que existe $k_0 \in K$ tal que $k_0 > 1$ ou $k_0 < 0$.

Quanto ao primeiro caso, existe $k_1 \in K$ tal que $k_1/3 = k_0$ ou $k_1/3 + 2/3 = k_0$. Logo, $k_1 = 3k_0 > k_0 > 1$ ou $k_1 = 3k_0 - 2 > k_0 + 2 - 2 = k_0 > 1$. De qualquer forma, $k_1 > k_0 > 1$. Retornando à definição, existe $k_2 \in K$ tal que $k_2/3 = k_1$ ou $k_2/3 + 2/3 = k_1$. Através do mesmo argumento, vê-se que $k_2 > k_1 > 1$. Indutivamente, constrói-se a sequência (k_n) em K , em que $k_{n+1} > k_n > 1$ para todo n natural. Como K é limitado, (k_n) também o é, de forma que (k_n) converge. Sendo K fechado, (k_n) converge para um certo $k \in K$ maior do que 1.

Veja que, para todo natural n , $k_{n+1} \geq 3k_n - 2$, de forma que

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} k_{n+1} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 3k_n - 2 = 3k - 2 \Rightarrow 2(k - 1) \leq 0 \Rightarrow k \leq 1,$$

um absurdo. O raciocínio é análogo quanto ao segundo caso. Se $k_0 < 0$, existe $k_1 \in K$ satisfazendo $k_1/3 = k_0$ ou $k_1/3 + 2/3 = k_0$. Logo, $k_1 = 3k_0 < k_0 < 0$ ou $k_1 = 3k_0 - 2 < k_0 - 2 < k_0 < 0$. De qualquer forma, $k_1 < k_0 < 0$. Retornando à definição, existe $k_2 \in K$ tal que $k_2/3 = k_1$ ou $k_2/3 + 2/3 = k_1$. Através do mesmo argumento, vê-se que $k_2 < k_1 < 0$. Mais uma vez, se constrói indutivamente a sequência (k_n) que satisfaz $k_{n+1} < k_n < 0$ para todo n natural, e sendo K um compacto, (k_n) converge para $k \in K$ menor do que 0.

Perceba que, para todo natural n , $k_{n+1} \leq 3k_n$, o que implica que

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} k_{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 3k_n = 3k \Rightarrow 2k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0,$$

também uma contradição, como desejado. Aí, como $K \subseteq \mathcal{K}_0$, segue que $G_0(K) \subseteq G_0(\mathcal{K}_0)$ e $G_2(K) \subseteq G_2(\mathcal{K}_0)$, e então

$$K = G_0(K) \cup G_2(K) \subseteq G_0(\mathcal{K}_0) \cup G_2(\mathcal{K}_0) = \mathcal{K}_1.$$

Indutivamente, $K \subseteq \mathcal{K}_n$ para todo n natural, de forma que $K \subseteq \mathcal{K}$. Para a outra inclusão, repare que, para todo n natural, \mathcal{K}_n é a união de 2^n subintervalos de $[0, 1]$ de comprimento $1/3^n$. Denote $\mathcal{K}_n = I_1 \cup \dots \cup I_{2^n}$. Naturalmente,

$$\mathcal{K}_{n+1} = G_0(I_1) \cup G_2(I_1) \cup \dots \cup G_0(I_{2^n}) \cup G_2(I_{2^n}).$$

Suponha que $x_1 \in I_1, \dots, x_{2^n} \in I_{2^n}$. Dessa forma, segue que $G_0(x_1) \in G_0(I_1), G_2(x_1) \in G_2(I_1), \dots, G_0(x_{2^n}) \in G_0(I_{2^n}), G_2(x_{2^n}) \in G_2(I_{2^n})$. Assim, dado $x \in K$ qualquer e iterando as funções G_0 e G_2 sucessivamente (continuando dentro de K , por hipótese), é possível obter um ponto de K em cada intervalo que compõe \mathcal{K}_n para todo n natural:

Dado $x_0 \in K$, vale que $x_0 \in [0, 1] = \mathcal{K}_0$. Se para $n \geq 1$ existem $x_i \in K$ tais que $x_i \in I_i$ como acima, para todo $1 \leq i \leq 2^n$, então $G_0(x_i) \in G_0(I_i)$ e $G_2(x_i) \in G_2(I_i)$ para todo $1 \leq i \leq 2^n$, o que justifica a afirmação acima por indução.

Portanto, se $k \in \mathcal{K}$, então $k \in \mathcal{K}_n$ para todo n natural. Aí, basta construir a sequência (k_n) , em que cada $k_n \in K$ está no mesmo subintervalo de \mathcal{K}_n que k . Como $|k_n - k| \leq 1/3^n$, é evidente que (k_n) converge para k e, sendo K fechado, $k \in K$, o que implica que $\mathcal{K} \subseteq K$, completando a demonstração. ■

Essas caracterizações múltiplas do conjunto dos terços médios de Cantor permitem extrair imediatamente certas propriedades, tais como o fato de que \mathcal{K} é não enumerável. Essa construção não aparece apenas no estudo da dinâmica da função T ; pelo contrário, conjuntos de Cantor aparecem naturalmente em sistemas dinâmicos de tempo discreto, como foi explorado na parte seguinte deste projeto.

Definição 18. *Seja X um espaço topológico e $S \subseteq X$. S é dito denso em lugar nenhum se o interior do seu fecho topológico é vazio. S é dito totalmente desconexo se seus componentes conexos possuem apenas um elemento. Essas definições são equivalentes na reta real. Por fim, S é dito perfeito se é fechado e não possui pontos isolados.*

S é denominado um conjunto de Cantor se S é totalmente desconexo, perfeito e compacto.

3.2.2 A Família Quadrática

O próximo objeto de estudo foi a dinâmica da função quadrática $Q_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q_c(x) = x^2 + c$, à medida que c varia em \mathbb{R} [4, 12]. Os valores de interesse, a princípio, foram $c < -2$; a grande maioria de suas órbitas tende a infinito, mas o comportamento dinâmico do sistema é bastante complicado no conjunto $[-p_+, p_+]$, em que p_+ é o maior ponto fixo de Q_c . Para simplificar a notação, chame $I = [-p_+, p_+]$. O primeiro resultado fundamental da análise dessa função é o teorema a seguir.

Teorema 19. Quando $c < -2$, o conjunto

$$\Lambda_c = \{x : Q_c^n(x) \in I \text{ para todo } n \geq 0\}$$

é um conjunto de Cantor.

Esse resultado indica que o conjunto dos pontos cuja órbita é limitada é “pequeno” em certo sentido, visto que um conjunto de Cantor não contém intervalos (tem interior vazio). Entretanto, a não linearidade da função Q_c dificulta a caracterização geométrica de Λ_c , como foi feito no caso do conjunto dos terços médios de Cantor. O assunto seguinte explorado nesse projeto introduziu uma ferramenta poderosa para contornar essa dificuldade.

O comportamento de Q_c quando $c = -2$ foi, também, bastante estudado nessa fase inicial: a função possui uma quantidade infinita de pontos periódicos; esses pontos são, contudo, difíceis de encontrar computacionalmente.

Teorema 20. A função Q_{-2} possui ao menos 2^n pontos periódicos no intervalo $I = [-2, 2]$.

Os métodos utilizados para demonstrar esse resultado, recorrentes na dinâmica unidimensional, foram aplicados no seguinte exercício.

Exercício 21 (Exercício 16 do capítulo 7 de [4]). Prove que $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ possui pelo menos 2^n pontos periódicos de período n no intervalo $[0, 1]$ (não necessariamente de menor período n) para $\lambda = 4$.

Solução. Repare que cada ponto de $I = [0, 1)$ possui duas pré-imagens em $[0, 1)$: dado $y \in [0, 1)$, resolva $4x(1-x) = y$:

$$4x(1-x) = y \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-y}}{2}.$$

Como $0 \leq y < 1$, tais expressões são números reais distintos, de forma que $|F_4^{-1}(y)| = 2$. Agora chame $g_0(x) = 1/2 - \sqrt{1-x}/2$ e $g_1(x) = 1/2 + \sqrt{1-x}/2$, com o domínio igual a $[0, 1]$. Evidentemente, $F_4(g_0(x)) = F_4(g_1(x)) = x$. Ambas as funções g_0 e g_1 são injetoras.

Para cada sequência finita de n termos $s_n = (s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,n})$ de 0s e 1s, isto é, $s_{n,i} \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq n$, defina

$$g_{s_n} = g_{s_{n,1}} \circ g_{s_{n,2}} \circ \dots \circ g_{s_{n,n}}.$$

Naturalmente, $F_4^n(g_{s_n}(x)) = x$. Como a composição de funções injetoras é injetora, g_{s_n} é injetora quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e s_n . Além disso, segue de que g_0 e g_1 são monótonas e a composição de funções monótonas é monótona que g_{s_n} também é monótona. Como também a continuidade é preservada, sua imagem é um intervalo $[a, b]$, em que $a = g_{s_n}(0)$ e $b = g_{s_n}(1)$ ou vice-versa.

Agora suponha que s_n e t_n são duas sequências binárias distintas com n termos. Se $\text{Im}(g_{s_n}) \cap \text{Im}(g_{t_n}) \neq \emptyset$, então existem $x, y \in [0, 1]$ tais que

$$g_{s_n}(x) = g_{t_n}(y) \Leftrightarrow (g_{s_{n,1}} \circ \dots \circ g_{s_{n,n}})(x) = (g_{t_{n,1}} \circ \dots \circ g_{t_{n,n}})(y).$$

Se $s_{n,1} = t_{n,1}$, segue da injetividade das funções g_0 e g_1 que

$$(g_{s_{n,2}} \circ \dots \circ g_{s_{n,n}})(x) = (g_{t_{n,2}} \circ \dots \circ g_{t_{n,n}})(y).$$

Assim, prossiga até o primeiro $1 \leq k \leq n$ tal que $s_{n,k} \neq t_{n,k}$. Então, chame $x^* = (g_{s_{n,k+1}} \circ \dots \circ g_{s_{n,n}})(x)$ e $y^* = (g_{t_{n,k+1}} \circ \dots \circ g_{t_{n,n}})(y)$. Supondo, sem perda de generalidade, que $s_{n,k} = 0$ e $t_{n,k} = 1$, tem-se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-y^*} \Leftrightarrow x^* = y^* = 1.$$

Portanto, $g_{s_n}(x) = (g_{s_{n,1}} \circ \dots \circ g_{s_{n,k}})(1)$, ou seja, há apenas um elemento na interseção. Como as imagens são intervalos fechados, então este elemento é uma de suas extremidades.

Defina $g_{s_n}^* : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $g_{s_n}^*(x) = g_{s_n}(x)$. Esta função é evidentemente bijetora. Se $f_{s_n} = (g_{s_n}^*)^{-1}$, então

$$f_{s_n}(x) = \left(F_4^n \circ g_{s_n} \circ (g_{s_n}^*)^{-1} \right)(x) = F_4^n(x),$$

isto é, f_{s_n} é a restrição de F_4^n a $[a, b]$. Para garantir a existência de pontos fixos, comece por $f_{(0,0,\dots,0)} : [0, b] \rightarrow [0, 1]$ e $f_{(1,0,\dots,0)} : [a, 1] \rightarrow [0, 1]$. Há quatro casos a considerar:

- Se $f_{(0,0,\dots,0)}(0) = 0$, então este é um ponto fixo para tal função.
- Se $f_{(0,0,\dots,0)}(0) = 1$, então construa $h(x) = f_{(0,0,\dots,0)}(x) - x$ e veja que $h(0) > 0$ e $h(b) < 0$, de forma que há uma raiz de h em $(0, b)$, isto é, um ponto fixo de $f_{(0,0,\dots,0)}$ em $(0, b)$.
- Se $f_{(1,0,\dots,0)}(1) = 1$, então este é um ponto fixo para tal função.
- Se $f_{(1,0,\dots,0)}(1) = 0$, então construa $h(x) = f_{(1,0,\dots,0)}(x) - x$ e veja que $h(a) > 0$ e $h(1) < 0$, de forma que há uma raiz de h em $(a, 1)$, isto é, um ponto fixo de $f_{(1,\dots,1)}$ em $(a, 1)$.

Considere então qualquer outra sequência binária de n termos s_n . É certo que se $f_{s_n} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, então $0 < a < b < 1$: a desigualdade do meio é trivial; a da esquerda e a da direita se devem ao fato de que se $i \in \{0, 1\}$, então $g_i(x) = 0 \Leftrightarrow i = 0$ e $x = 0$, e $g_i(x) = 1 \Leftrightarrow i = 1$ e $x = 0$.

Portanto, chame $h(x) = f_{s_n}(x) - x$ e note que $h(a) < 0$, $h(b) > 0$ se $f_{s_n}(a) = 0$, e $h(a) > 0$, $h(b) < 0$ se $f_{s_n}(a) = 1$. Isso garante a existência de um ponto fixo para tal função em (a, b) .

Os cálculos acima demonstram que para cada s_n há um ponto fixo de f_{s_n} em seu domínio aberto. Como as interseções dos domínios se dão apenas nas extremidades, cada função f_{s_n} produz ao menos um ponto fixo de F_4^n . Como há 2^n possíveis sequências s_n e, dessa forma, 2^n funções f_{s_n} , então F_4^n tem ao menos 2^n pontos fixos, como se queria demonstrar. ■

3.2.3 Dinâmica Simbólica

Para aprofundar o difícil estudo analítico de Q_c , foram introduzidas as ideias fundamentais da chamada dinâmica simbólica [4, 12]. Trabalhar num espaço de sequências topologicamente conjugado ao sistema dinâmico em estudo permite compreender com detalhes o comportamento de suas órbitas e encontrar pontos periódicos com facilidade.

Definição 22. Seja

$$\Sigma = \{\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_j \in \{0, 1\} \text{ para todo } j \geq 0\}$$

e defina a distância $d: \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Com essa métrica, (Σ, d) é um espaço métrico. A função $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$, chamada *shift map*, é conjugada à Q_c .

Seja A_1 o conjunto dos pontos de I que sai de I após uma iteração de Q_c . $I - A_1$ é a união de dois intervalos fechados disjuntos, I_0 e I_1 .

Teorema 23. Suponha que $c < -2$. Então, defina $S: \Lambda_c \rightarrow \Sigma$,

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots),$$

em que $s_j = 0$ se $Q_c^j(x) \in I_0$ e $s_j = 1$ se $Q_c^j(x) \in I_1$ para todo $j \geq 0$. Então, S é um homeomorfismo e $S \circ Q_c = \sigma \circ S$.

No espaço de sequências, é muito fácil produzir pontos periódicos de qualquer período: a sequência

$$(\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}})$$

é um ponto periódico de período n de σ . Por outro lado, o espaço de sequências não permite fazer uso da intuição geométrica. Ao trabalhar com Q_c na reta real, por outro lado, não é imediato encontrar pontos periódicos, porém a intuição geométrica é muito útil. Assim, transitar entre esses espaços permite contornar certas características intrínsecas a cada um deles.

Segue abaixo um dos exercícios realizados utilizando os métodos da dinâmica simbólica.

Exercício 24. Considere a função

$$T(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 1/2, \\ 3 - 3x & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

Como já demonstrado anteriormente, $\Gamma = \{x \in [0, 1] : T^n(x) \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto de Cantor. Defina uma função itinerária $S: \Gamma \rightarrow \Sigma$ e prove que S é um homeomorfismo.

Solução. Defina $I_0 = [0, 1/3]$ e $I_1 = [2/3, 1]$. Seja $S: \Gamma \rightarrow \Sigma$,

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots) \text{ se } x \in I_{s_0}, T(x) \in I_{s_1}, \dots, T^n(x) \in I_{s_n}, \dots$$

I. S é injetora.

Tome $x, y \in \Gamma$ e suponha que $S(x) = S(y)$ mas $x \neq y$.

Chame J_n o intervalo de extremidades $T^n(x)$ e $T^n(y)$. Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}$, J_m

é degenerado, isto é, $T^m(x) = T^m(y)$. Mas como T é injetora em I_{s_m} , intervalo que contém $T^m(x) = T^m(y)$, segue que $T^{m-1}(x) = T^{m-1}(y)$. Como T é injetora em $I_{s_{m-1}}$, intervalo que contém $T^{m-1}(x) = T^{m-1}(y)$, segue que $T^{m-2}(x) = T^{m-2}(y)$. Iterativamente, se conclui que $x = y$, um absurdo, de forma que os intervalos J_n não são degenerados.

Como $|T'(t)| = 3$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o Teorema do Valor Médio garante que existem $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{|T^k(x) - T^k(y)|}{|T^{k-1}(x) - T^{k-1}(y)|} = |T'(\xi_k)| = 3$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Logo,

$$|T^n(x) - T^n(y)| = |x - y| \prod_{k=1}^n \frac{|T^k(x) - T^k(y)|}{|T^{k-1}(x) - T^{k-1}(y)|} = 3^n |x - y|,$$

de forma que

$$1 \geq |T^n(x) - T^n(y)| = 3^n |x - y|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isso é um absurdo, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n |x - y| = \infty$, de forma que a hipótese inicial é falsa e S é injetora.

II. S é sobrejetora.

Tome $\mathbf{s} \in \Sigma$, $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Dado um intervalo fechado $J \subseteq [0, 1]$, seja $T^{-n}(J)$ a sua pré-imagem por T^n , $n \in \mathbb{N}$. Se $T_1 = T|_{[0, 1/2]}$ e $T_2 = T|_{[1/2, 1]}$, existem as inversas $T_1^{-1}: [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$ e $T_2^{-1}: [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$,

$$T_1^{-1}(x) = \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad T_2^{-1}(x) = -\frac{x}{3} + 1.$$

Veja que $\text{Im}(T_1^{-1}) = [0, 1/3]$ e $\text{Im}(T_2^{-1}) = [2/3, 1]$. Como essas inversas são contínuas e injetoras, qualquer intervalo fechado J em $[0, 1]$ tem como pré-imagem por T dois intervalos fechados, um em $I_0 = [0, 1/3]$, correspondente a T_1^{-1} , e outro em $I_1 = [2/3, 1]$, correspondente a T_2^{-1} . Defina o conjunto

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{x \in [0, 1] \mid x \in I_{s_0}, T(x) \in I_{s_1}, \dots, T^n(x) \in I_{s_n}\}.$$

É evidente que esse conjunto é igual a

$$I_{s_0} \cap T^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{s_n}).$$

Será provado por indução que cada $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ é um intervalo fechado (e, portanto, não vazio). Comece observando que I_0 e I_1 são intervalos fechados. Suponha então que, para qualquer sequência binária de n dígitos $t_1 \dots t_n$, $I_{t_1 \dots t_n}$ é um intervalo fechado. Logo, dada uma sequência binária de $n + 1$ dígitos $r_0 r_1 \dots r_n$,

$$\begin{aligned} I_{r_0 r_1 \dots r_n} &= I_{r_0} \cap T^{-1}(I_{r_1}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{r_n}) \\ &= I_{r_0} \cap T^{-1}(I_{r_1} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(I_{r_n})) \\ &= I_{r_0} \cap T^{-1}(I_{r_1 \dots r_n}). \end{aligned}$$

Mas aí $I_{r_1 \dots r_n}$ é, por indução, um intervalo fechado, de forma que sua pré-imagem $T^{-1}(I_{r_1 \dots r_n})$ são dois intervalos fechados, um em I_0 e outro em I_1 . Como $I_{r_0} = I_0$ ou I_1 , segue que $I_{r_0 r_1 \dots r_n}$ é um intervalo fechado, completando a indução. Usando que

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap T^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}$$

para todo $n \geq 0$, tem-se que $(I_{s_0 \dots s_n})$ é uma sequência de intervalos fechados encaixados. Assim, vale o Teorema dos Intervalos Encaixados e existe $x \in [0, 1]$ tal que

$$x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n} \Rightarrow x \in I_{s_0}, T(x) \in I_{s_1}, \dots, T^n(x) \in I_{s_n}, \dots,$$

e $S(x) = \mathbf{s}$, como esperado. Além disso, como S é injetora, x é o único ponto nessa interseção, de forma que o tamanho dos intervalos $I_{s_0 \dots s_n}$ tende a zero à medida que n cresce (caso contrário, essa interseção seria ela própria um intervalo).

III. S e S^{-1} são contínuas.

Resta mostrar a continuidade da função e de sua inversa. Dados $\varepsilon > 0$ e $x \in \Gamma$, com $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < \varepsilon$. Aí, considere os intervalos fechados $I_{t_0 \dots t_n}$ para qualquer sequência binária de n dígitos $(t_0 \dots t_n)$.

Tais intervalos são disjuntos: se $(t_0 \dots t_n) \neq (r_0 \dots r_n)$, existe $0 \leq i \leq n$ tal que $t_i \neq r_i$, de forma que, se $y \in I_{t_0 \dots t_n} \cap I_{r_0 \dots r_n}$, então $T^i(x) \in I_{t_i} \cap I_{r_i} = \emptyset$, uma contradição. Aí, tome $\delta > 0$ tal que $\delta < \min \{x - a : a \text{ é uma extremidade de } I_{s_0 \dots s_n}\}$, escolha que é possível pois $|I_{s_0 \dots s_n}| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, o que implica que $(x - \delta, x + \delta) \subseteq I_{s_0 \dots s_n}$.

Dessa forma, tome $y \in \Gamma$ tal que $|x - y| < \delta$, e aí $y \in I_{s_0 \dots s_n} \Rightarrow d[S(x), S(y)] \leq 1/2^n < \varepsilon$ e S é contínua, como desejado.

Por outro lado, dado $\mathbf{s} \in \Sigma$, observe que há 2^n intervalos disjuntos da forma $I_{t_0 \dots t_n}$, todos contidos em $[0, 1]$. Logo, $|I_{s_0 \dots s_n}| \leq 1/2^n$. Então, escolha $\delta = 1/2^{n+1}$, pois $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] < 1/2^{n+1} \Rightarrow s_i = t_i$ para todo $0 \leq i \leq n+1 \Rightarrow |S^{-1}(x) - S^{-1}(y)| < |I_{s_0 \dots s_n s_{n+1}}| \leq 1/2^{n+1} < 1/2^n < \varepsilon$ e S^{-1} é contínua, concluindo a prova. ■

3.2.4 Caos

Dada a relevância do shift map para o entendimento da função quadrática Q_c , é natural buscar compreender melhor a dinâmica de σ . Assim, o tópico de estudo seguinte consistiu em abstrair as características mais fundamentais do comportamento de σ em Σ . Essa análise levou à definição do conceito de caos [4].

Definição 25. *Seja (X, d) um espaço métrico e $f: X \rightarrow X$. f é dita topologicamente transitiva se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ tal que $d(x, z) < \varepsilon$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $d(f^k(z), y) < \varepsilon$. f exibe dependência sensível das condições iniciais se existe $\beta > 0$ tal que para todo $x \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $d(x, y) < \varepsilon$ e $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \beta$.*

Um sistema dinâmico (f, X) é chamado caótico se o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X , se f é transitiva e se f exibe dependência sensível das condições iniciais.

A existência de uma órbita densa em X é, nos contextos considerados, equivalente a f ser

topologicamente transitiva [3]. Além disso, o comportamento caótico é preservado por conjugação topológica (até por semi-conjugação; as duas primeiras propriedades são preservadas, embora a terceira não seja, mas isso não faz diferença, vide [1]). Como σ é caótica em Σ , segue dessa observação que Q_c é caótica em Λ_c para $c < -2$.

Algumas conjugações topológicas são imediatas e permitem revelar bastante informação a respeito de vários sistemas.

Teorema 26. *A função quadrática $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ é caótica em $[-2, 2]$; a função logística $F_4(x) = 4x(1 - x)$ é caótica em $[0, 1]$; a função diádica $D(x) = 2x \pmod{1}$ é caótica em $[0, 1]$.*

A última parte desse teorema foi realizada como exercício e revela uma conexão profunda entre a função D e Q_{-2} .

Exercício 27. *Prove que a função diádica dada por*

$$D(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2, \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2, \end{cases}$$

é caótica em $[0, 1]$.

Solução. Comece observando que todo racional de denominador ímpar em $[0, 1)$ é ponto periódico de D . De fato, seja n um inteiro positivo e veja que os pontos fixos de D^n são 0 e os racionais $1/(2^n - 1), \dots, 2^n/(2^n - 1)$.

Isto se verifica indutivamente: para todo $0 \leq i \leq 2^n - 1$, a restrição de D^n a $[i/2^n, (i+1)/2^n)$ é tal que

$$D^n(x) = 2^n x - i \quad \forall x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right).$$

Quando $n = 1$, esta afirmação é obviamente verdadeira. Supondo-a verdadeira para $n = k \geq 1$, considere $n = k + 1$: observe primeiro que $D^{k+1} = D^k \circ D$. Aí, dado $0 \leq i \leq 2^{k+1} - 1$, tome $x \in [i/2^{k+1}, (i+1)/2^{k+1})$ e repare que, se $i = 2j$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$, então

$$D^k(x) = 2^k x - j \Rightarrow 0 \leq D^k(x) < \frac{1}{2},$$

aí $D^{k+1}(x) = 2D^k(x) = 2^k x - 2j = 2^k x - i$. Por outro lado, se $i = 2j + 1$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$, então

$$D^k(x) = 2^k x - j \Rightarrow \frac{1}{2} \leq D^k(x) < 1,$$

aí $D^{k+1}(x) = 2D^k(x) - 1 = 2^k x - 2j - 1 = 2^k x - i$, completando a indução. Assim, fica evidente quais são os pontos periódicos de D . É fácil verificar que esse conjunto é denso em $[0, 1)$.

Agora seja $x \in [0, 1)$ o número cuja expansão binária consiste em todas as possíveis sequências finitas de 0s e 1s:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots = 0, \boxed{0 \mid 1 \mid 00 \mid 01 \mid 10 \mid 11} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

Em binário, a aplicação D se comporta da mesma forma que o shift map: dado $y \in [0, 1)$, $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ em binário, tem-se que: se $y_1 = 0$ (e existe algum $i \geq 1$ tal que $y_i = 0$), então $y < 1/2$ e $D(y) = 2y = 0, y_2 y_3 y_4 \dots$; se $y_1 = 1$, então $y \geq 1/2$ e $D(y) = 2y - 1 = 1, y_2 y_3 y_4 \dots - 1 = 0, y_2 y_3 y_4 \dots$. A única exceção a essa fórmula ocorre quando $1/2$ é escrito como $0, 111 \dots$.

Como $D^n(x)$ é evidentemente diferente de $0, 111 \dots$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, segue que $D^n(x) = 0, x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots$. A órbita de x por D é, portanto, densa em $[0, 1)$, e segue que este sistema é transitivo. Basta exibir dependência sensível das condições iniciais: defina $\beta = 1/3$. Tome $x, y \in [0, 1)$ distintos. Suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $p_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{p_n - 1}{2^n} \leq x < \frac{p_n}{2^n}.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ o maior número tal que $x, y \in \left[\frac{p_k - 1}{2^k}, \frac{p_k}{2^k} \right)$. Assim,

$$\frac{p_k - 1}{2^k} \leq x < y < \frac{p_k}{2^k} \Rightarrow \frac{2p_k - 2}{2^{k+1}} \leq x < \frac{2p_k - 1}{2^{k+1}} \leq y < \frac{2p_k}{2^{k+1}};$$

caso contrário, isto é, caso $x \geq (2p_k - 1)/2^{k+1}$ ou $y \leq (2p_k - 1)/2^{k+1}$, então

$$x, y \in \left[\frac{p_{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \frac{p_{k+1}}{2^{k+1}} \right), p_{k+1} = 2p_k, \quad \text{ou} \quad x, y \in \left[\frac{q_{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \frac{q_{k+1}}{2^{k+1}} \right), q_{k+1} = 2p_k - 1,$$

contradizendo a maximalidade de k . Segue que

$$x, y \in \left[\frac{p_k - 1}{2^k}, \frac{p_k}{2^k} \right) \quad \text{e} \quad x \in \left[\frac{2p_k - 2}{2^{k+1}}, \frac{2p_k - 1}{2^{k+1}} \right), y \in \left[\frac{2p_k - 1}{2^{k+1}}, \frac{2p_k}{2^{k+1}} \right).$$

Isso implica que

$$D^k(x) = 2^k x - p_k + 1, \quad D^k(y) = 2^k y - p_k + 1 \Rightarrow |D^k(x) - D^k(y)| = 2^k |x - y|.$$

Se $2^k |x - y| \geq 1/3$, não há mais nada a fazer. Caso contrário, tem-se que

$$|D^{k+1}(x) - D^{k+1}(y)| = |2^{k+1}(x - y) - 1| \geq 1 - 2^{k+1}|x - y| > 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Isso conclui a demonstração. ■

3.2.5 Teorema de Sarkovskii

O último tópico examinado foi o celebrado Teorema de Sarkovskii, que destrincha profundamente o comportamento de sistemas dinâmicos na reta [5]. Antes de estudá-lo, foi primeiro analisado o resultado intermediário de Li e Yorke (1975) [8], descrito no teorema a seguir.

Teorema 28. *Seja J um intervalo não degenerado da reta e $F: J \rightarrow J$ uma função contínua. Suponha que existe um ponto $a \in J$ tal que*

$$F^3(a) \leq a < F(a) < F^2(a) \quad (\text{ou } F^3(a) \geq a > F(a) > F^2(a)).$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um ponto periódico em J de menor período k .

Naturalmente, se F possui um ponto periódico de menor período 3, o resultado acima implica que F possui pontos periódicos de quaisquer outros períodos, bastando que a função seja contínua. Surpreendentemente, esse teorema pode ser bastante generalizado através de ideias sofisticadas que fazem uso de métodos elementares apenas, como o Teorema do Valor Intermediário. Nos enunciados que seguem, assumamos que $f: I \rightarrow I$ é uma função contínua.

Definição 29. *Sejam $J_0, J_1, \dots, J_{n-1}, J_n \subseteq I$ intervalos fechados tais que $J_n = J_0$ e $J_{i+1} \subseteq f(J_i)$ para cada $0 \leq i \leq n-1$. Então $J_0 J_1 \dots J_{n-1} J_0$ é dito um ciclo de comprimento n .*

Lema 30. *Se $J_0 J_1 \dots J_{n-1} J_0$ é um ciclo de comprimento n , então existe um ponto periódico y de f tal que $f^i(y) \in J_i$ para todo $0 \leq i \leq n-1$ e $f^n(y) = y$.*

O repetido uso desse lema em determinados ciclos é o método principal utilizado na demonstração do Teorema de Sarkovskii. A estrutura essencial que permite aplicar o tal lema repetidamente são os ciclos de Štefan. O teorema decorre de maneira bastante natural após examinar a natureza desses ciclos.

Definição 31. *Seja P uma órbita de período m de f com $m \geq 3$ ímpar. Se existe um ponto $p \in P$ tal que*

$$f^{m-2}(p) < \dots < f^3(p) < f(p) < p = f^m(p) < f^2(p) < f^4(p) < \dots < f^{m-1}(p)$$

ou

$$f^{m-1}(p) < \dots < f^4(p) < f^2(p) < p = f^m(p) < f(p) < f^3(p) < \dots < f^{m-2}(p),$$

então P é chamado um ciclo de Štefan de f com menor período m .

Lema 32. *Se $m \geq 3$ é ímpar e não existem pontos periódicos de f de menor período ímpar l tal que $1 < l < m$, então P é um ciclo de Štefan, f possui pontos periódicos de todos os períodos pares e pontos periódicos de todos os períodos maiores que m .*

Teorema 33 (Teorema de Sarkovskii). *Considere a ordenação de Sarkovskii dos naturais:*

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 3 & \prec & 5 & \prec & 7 & \prec & 9 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^0 & \prec & \dots \\ \prec & 3 \cdot 2 & \prec & 5 \cdot 2 & \prec & 7 \cdot 2 & \prec & 9 \cdot 2 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^1 & \prec & \dots \\ \prec & 3 \cdot 2^2 & \prec & 5 \cdot 2^2 & \prec & 7 \cdot 2^2 & \prec & 9 \cdot 2^2 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^2 & \prec & \dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \prec & \dots & \prec & 2^n & \prec & \dots & \prec & 2^3 & \prec & 2^2 & \prec & 2 & \prec & 1 \end{array}$$

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f possui um ponto periódico de período fundamental n e $n \prec k$ na ordenação de Sarkovskii, então f possui um ponto periódico de período fundamental k .

4 Conclusão

Este projeto permitiu ao aluno ter contato com vários métodos e resultados relevantes a respeito de sistemas dinâmicos, em ambas as frentes, desenvolvendo boa intuição e interesse

por essa importante área da matemática.

Referências

- [1] John Banks, Jeffrey Brooks, Grant Cairns, Gary Davis, and Peter Stacey. On devaney's definition of chaos. *The American mathematical monthly*, 99(4):332–334, 1992.
- [2] Luis Barreira and Claudia Valls. *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*, volume 137. American Mathematical Soc., 2012.
- [3] Nedim Değirmenci and Şahin Koçak. Existence of a dense orbit and topological transitivity: when are they equivalent? *Acta Mathematica Hungarica*, 99(3):185–187, 2003.
- [4] RL Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Westview Press, 1992.
- [5] Bau-Sen Du. A collection of simple proofs of sharkovsky's theorem. *arXiv preprint math/0703592*, 2007.
- [6] gernot. Drawing the trace determinant diagram, 2017. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/a/347401/253698>>. Acesso em: 4 de outubro de 2021.
- [7] Yuri A Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] Tien-Yien Li and James A. Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975.
- [9] Aloisio F Neves. Notas de aula: Forma de jordan e equações diferenciais lineares. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~aloisio/documentos/jordan.pdf>>. Acesso em: 27 de agosto de 2021.
- [10] S G Nietto. Anotações da iniciação científica.
- [11] L Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [12] Clark Robinson. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC press, 1998.
- [13] Pedro M Rodrigues. Notes on ordinary differential equations – vi. Disponível em: <<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~pmartins/ED0/NotasED06.pdf>>. Acesso em: 16 de dezembro de 2021.
- [14] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [15] PR Wolenski. The cantor middle-thirds set. discrete dynamical systems – math 2030, fall 2012. Disponível em: <<https://www.math.lsu.edu/~wolenski/Fall2012/06CantorSet.pdf>>.