

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

**Uma introdução aos sistemas dinâmicos:
tempo contínuo e tempo discreto**

Anotações

Aluno: André Boscarol Rasera, RA: 231312

Orientador: Ricardo Miranda Martins

Campinas, SP

2022

Sumário

1	Dinâmica Contínua	2
1.1	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares	2
1.1.1	Exercícios	2
1.2	Diagrama Traço-Determinante	9
1.3	Bifurcação de Hopf	15
1.3.1	Exercícios	15
1.4	Fluxo Tubular	26
1.4.1	Teorema de Picard-Lindelöf	26
1.4.2	Teorema do Fluxo Tubular	32
1.5	Teorema de Poincaré-Bendixson	41
1.5.1	Exercícios	41
2	Dinâmica Discreta	45
2.1	Conjunto de Cantor	45
2.1.1	Exercícios	45
2.2	A Família Quadrática	47
2.2.1	Exercícios	47
2.3	Dinâmica Simbólica	55
2.3.1	Exercícios	55
2.4	Caos	61
2.4.1	Transitividade e Órbita Densa	61
2.4.2	Dependência Sensível das Condições Iniciais	63
2.4.3	Exercícios	65
2.5	Teorema de Sarkovskii	75
2.5.1	Período Três Implica Caos	75
2.5.2	Teorema de Sarkovskii	77

1 Dinâmica Contínua

1.1 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

1.1.1 Exercícios

Os exercícios abaixo foram extraídos de [10].

Exercício 1.1. *No contexto da **Proposição 3.2** ([10], p. 5): prove que H e K são A -invariantes, $A|_H$ é nilpotente de índice k e $A|_K$ é invertível.*

Solução. Tome $u \in H = \ker(A^k)$ e considere Au :

$$A^k(Au) = A(A^k u) = 0,$$

logo, $Au \in H$. Isso implica, naturalmente, que H é A -invariante. Da mesma forma, tome $v \in K = \text{Im}(A^k)$. Assim, existe $w \in V$ tal que $A^k w = v$. Então, $A^{k+1} w = A^k(Aw) = Av$. Por conseguinte, $Av \in K$ e K é A -invariante.

Note que $(A|_H)^k u = A^k u = 0$ para todo $u \in H$, ou seja, $(A|_H)^k$ é o operador nulo em H . Pela minimalidade de k , $\ker(A^{k-1})$ é subespaço próprio de $\ker(A^k)$, de forma que existe $v \in \ker(A^k) \setminus \ker(A^{k-1})$ e aí $(A|_H)^{k-1} v = A^{k-1} v \neq 0$. Portanto, $(A|_H)^{k-1}$ é diferente do operador nulo em H e $A|_H$ é nilpotente de índice k .

Escolha $w_0 \in K$ tal que $A|_K w_0 = 0$. Certamente, existe $v_0 \in V$ de forma que $A^k v_0 = w_0$. Logo, $A|_K(A^k v_0) = A^{k+1} v_0 = 0$. Assim, $v_0 \in \ker(A^{k+1}) \Rightarrow v_0 \in \ker(A^k)$. Assim, $A^k v_0 = w_0 = 0$ e $A|_K$ é injetora.

Repare que $\text{Im}(A^{k+1}) \subseteq \text{Im}(A^k)$, $A^{k+1} w = A^k(Aw)$ para qualquer $w \in V$. Do **Teorema do Núcleo e da Imagem**,

$$\dim(\ker(A^{k+1})) + \dim(\text{Im}(A^{k+1})) = \dim(V) = \dim(\ker(A^k)) + \dim(\text{Im}(A^k)).$$

Como $\ker(A^{k+1}) = \ker(A^k)$, segue que $\dim(\text{Im}(A^{k+1})) = \dim(\text{Im}(A^k))$, o que implica que $\text{Im}(A^{k+1}) = \text{Im}(A^k)$. Portanto, ao escolher $v \in K$, segue que $v \in \text{Im}(A^{k+1})$, de forma que existe $u \in V$ tal que $v = A^{k+1} u = A(A^k u) = A|_K(A^k u)$. Finalmente, é possível concluir que $A|_K$ é sobrejetora e, dessa forma, um isomorfismo de espaços vetoriais (invertível), concluindo a demonstração. ■

Exercício 1.2. *No contexto do estudo de pontos nodais ([10], p. 14): verifique o caso para autovalores positivos.*

Solução. Considere que ambos λ e μ são positivos e note que para $dy/dx = c \cdot e^{(\mu-\lambda)t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, é preciso que $\mu - \lambda > 0 \Leftrightarrow \mu > \lambda \Leftrightarrow |\lambda| < |\mu|$. Novamente, o eixo de tangência das soluções é aquele na direção do autovetor correspondente ao menor autovalor em módulo, como esperado. ■

Exercício 1.3. *No contexto da exponencial de matrizes ([10], p. 19): demonstre que*

a norma

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

satisfaz (i), (ii) e (iii).

Solução. (i) A norma usual em \mathbb{R}^n é tal que $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, com a igualdade valendo se, e somente se, $x = 0$. Portanto, se $x \neq 0$, $|x| > 0$ e $|Ax| \geq 0$, de forma que

$$\frac{|Ax|}{|x|} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} \geq 0 \Leftrightarrow \|A\| \geq 0.$$

Se $\|A\| = 0$, segue da não negatividade das expressões $|Ax|/|x|$ que $|Ax|/|x| = 0 \Leftrightarrow |Ax| = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Usando a mesma representação que a do texto,

$$|Ax| = (\langle a_1, x \rangle^2 + \cdots + \langle a_n, x \rangle^2)^{1/2} = 0 \Leftrightarrow \langle a_1, x \rangle^2 + \cdots + \langle a_n, x \rangle^2 = 0.$$

Portanto, $\langle a_i, x \rangle = 0 \quad \forall i \in I_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Em particular, a_i é ortogonal a e_1, \dots, e_n , de forma que $a_i = 0$ e $A = 0$. A recíproca é imediata, isto é, $A = 0 \Rightarrow |Ax| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \|A\| = 0$, completando a prova.

(ii) Caso $\alpha = 0$, a igualdade é imediata. Caso contrário, suponha que $\alpha \neq 0$ e observe que $|\alpha|\|A\|$ é cota superior de $\{ |(\alpha A)x|/|x| : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \}$, visto que $\|A\| \geq |Ax|/|x|$ e aí $|\alpha|\|A\| \geq |\alpha||Ax|/|x| = |(\alpha A)x|/|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se existir cota superior menor que $|\alpha|\|A\|$, β , por exemplo, então $|\alpha^{-1}|\beta$ será cota superior de $\{|Ax|/|x| : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ menor que $\|A\|$, absurdo. Portanto, $|\alpha|\|A\|$ é o supremo do primeiro conjunto referido, confirmando a igualdade desejada.

(iii) Note que, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\frac{|(A+B)x|}{|x|} = \frac{|Ax+Bx|}{|x|} \leq \frac{|Ax|}{|x|} + \frac{|Bx|}{|x|}.$$

Portanto, $\|A\| + \|B\|$ é certamente cota superior de $\{|(A+B)x|/|x| : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$, maior ou igual ao supremo de tal conjunto, ou seja,

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

como se queria demonstrar. ■

Exercício 1.4. Encontre a forma de Jordan das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solução. 1^a matriz:

Comece calculando o polinômio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Há 2 autovalores distintos, 3 e -1 , e, sendo a ordem da matriz igual a 2, tem-se que o operador é diagonalizável e sua forma normal de Jordan é

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2^a matriz:

Novamente, calcule o polinômio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = [\lambda - (1 + i)][\lambda - (1 - i)].$$

Os autovalores do operador são, portanto, $1 + i$ e seu conjugado $1 - i$. Logo, as formas normais de Jordan, considerando entradas complexas ou reais, respectivamente, são

$$\begin{bmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3^a matriz:

Mais uma vez, calcule o polinômio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 & 6 \\ -2 & \lambda + 1 & 2 \\ -4 & 2 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 4) - 24 + 24(\lambda + 1) - 4(\lambda - 5) \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 4) + 20(\lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1) [\lambda^2 - \lambda - 20 + 20] \\ &= (\lambda - 0)(\lambda - 1)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Há, dessa forma, 3 autovalores distintos numa matriz de ordem 3, de forma que o operador é diagonalizável e a forma normal de Jordan é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

■

Exercício 1.5. *Determine a exponencial das matrizes acima.*

Solução. 1^a matriz:

Resolvendo os respectivos sistemas lineares, um autovetor associado a $\lambda = 3$ é $[-1 \ 1]^T$ e um autovetor associado a $\lambda = -1$ é $[1 \ 1]^T$. Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Calculando a exponencial da matriz,

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \exp\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2e} \begin{bmatrix} 1 + e^4 & 1 - e^4 \\ 1 - e^4 & 1 + e^4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2ª matriz:

Resolvendo os respectivos sistemas lineares, um autovetor associado a $\lambda = 1 + i$ é $[i \ 1]^T$ e um autovetor associado a $\lambda = 1 - i$ é $[-i \ 1]^T$. Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Calculando a exponencial da matriz,

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \exp\left(\begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1+i} & 0 \\ 0 & e^{1-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ie^{1+i} & -ie^{1-i} \\ e^{1+i} & e^{1-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{1+i} + e^{1-i} & i(e^{1+i} - e^{1-i}) \\ i(e^{1-i} - e^{1+i}) & e^{1+i} + e^{1-i} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} e^{1+i} + e^{1-i} &= e \cdot \{ [\cos(1) + \cos(-1)] + i \cdot [\sin(1) + \sin(-1)] \} \\ &= 2e \cdot \cos(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{1+i} - e^{1-i} &= e \cdot \{ [\cos(1) - \cos(-1)] + i \cdot [\sin(1) - \sin(-1)] \} \\ &= 2e \cdot i \cdot \sin(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e \cdot \cos(1) & -e \cdot \sin(1) \\ e \cdot \sin(1) & e \cdot \cos(1) \end{bmatrix}.$$

3ª matriz:

Resolvendo os respectivos sistemas lineares, um possível autovetor associado a $\lambda = 0$ é $[6 \ 2 \ 5]^T$, um autovetor associado a $\lambda = 1$ é $[3 \ 1 \ 2]^T$ e, por fim, um autovetor associado a $\lambda = -1$ é $[2 \ 1 \ 2]^T$. Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Calculando a exponencial da matriz,

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{e} \begin{bmatrix} 3e^2 - 2 & 6e^2 + 6 & -6e^2 \\ e^2 - 1 & 2e^2 + 3 & -2e^2 \\ 2e^2 - 2 & 4e^2 + 6 & -4e^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Quanto à primeira matriz, os autovalores são ambos reais e distintos, de forma que o retrato de fase é um **nó repulsor**. Quanto à segunda matriz, os autovalores são complexos conjugados de parte real positiva, de forma que o retrato de fase é um **foco repulsor**. ■

Exercício 1.6. Duas matrizes A e B são ditas similares se existe uma matriz invertível M tal que

$$A = M^{-1}BM.$$

Mostre que:

- Duas matrizes são similares se, e somente se, possuem forma de Jordan iguais;
- Toda matriz é similar à sua tranposta;
- Toda matriz real 2×2 com determinante negativo é diagonalizável (similar a uma matriz diagonal).

Solução. (a) Suponha que A e B sejam similares. Logo, existe P invertível tal que $A = P^{-1}BP$. Naturalmente, se J_A é a forma de Jordan da matriz A , existe S invertível tal que $A = S^{-1}J_AS$. Logo,

$$S^{-1}J_AS = P^{-1}BP \Leftrightarrow (SP^{-1})^{-1}J_A(SP^{-1}) = B.$$

Portanto, a forma de Jordan da matriz B é igual a J_A . Reciprocamente, se $J_A = J_B$, existem P, S invertíveis tais que $A = P^{-1}J_AP$ e $B = S^{-1}J_BS$. Então,

$$A = P^{-1}J_BP = P^{-1}(SBS^{-1})P(S^{-1}P)^{-1}B(S^{-1}P)$$

e A e B são similares.

(b) Seja $J_n(\lambda)$ um bloco de Jordan $n \times n$ da forma

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

e B_n uma matriz quadrada $n \times n$ da forma

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_n^{-1}.$$

Calcule $B_n^{-1}J_n(\lambda)B_n$:

$$B_n^{-1}J_n(\lambda)B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Evidentemente, $B_n^{-1}J_n(\lambda)B_n = J_n(\lambda)^T$. Explorando essa identidade em matrizes em blocos, é possível construir uma matriz B tal que, dada uma forma de Jordan J , $B^{-1}JB = J^T$. Disso e do resultado anterior segue a proposição.

(c) A afirmação é verdadeira para matrizes 2×2 . Se A é uma matriz 2×2 com determinante negativo, então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad c_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc,$$

em que c_A é o polinômio característico de A . As raízes desse polinômio são da forma

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}.$$

como $\det(A) = ad - bc < 0$, $-4(ad - bc) > 0$ e o discriminante é positivo, de forma que há duas raízes distintas para o polinômio. Equivalentemente, A possui dois autovalores distintos, donde segue que A é diagonalizável. ■

Exercício 1.7. *Seja A uma matriz $n \times n$ e $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:*

(a)

$$\frac{d}{dt} \langle x(t), y(t) \rangle = \langle \dot{x}(t), y(t) \rangle + \langle x(t), \dot{y}(t) \rangle;$$

(b)

$$\langle Ax(t), y(t) \rangle = \langle x(t)A^t y(t) \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual \mathbb{R}^n , e A^t denota a matriz transposta de A .

Solução. (a) Sejam $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ diferenciáveis. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x(t), y(t) \rangle &= \frac{d}{dt} [x_1(t)y_1(t) + \dots + x_n(t)y_n(t)] \\ &= x'_1(t)y_1(t) + x_1(t)y'_1(t) + \dots + x'_n(t)y_n(t) + x_n(t)y'_n(t) \\ &= [x'_1(t)y_1(t) + \dots + x'_n(t)y_n(t)] + [x_1(t)y'_1(t) + \dots + x_n(t)y'_n(t)] \\ &= \langle x'(t), y(t) \rangle + \langle x(t), y'(t) \rangle, \end{aligned}$$

como esperado.

(b) Se $A = (a_{i,j})$, então

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \left(\sum_{k=1}^n a_{1,k}x_k(t), \dots, \sum_{k=1}^n a_{n,k}x_k(t) \right), \\ A^T y(t) &= \left(\sum_{k=1}^n a_{k,1}y_k(t), \dots, \sum_{k=1}^n a_{k,m}y_k(t) \right). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\langle Ax(t), y(t) \rangle = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,k}x_k(t)y_l(t),$$

$$\langle x(t), A^T y(t) \rangle = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,l} y_k(t) x_l(t).$$

Os somatórios comutam e aí basta trocar os índices para observar a igualdade. ■

Exercício 1.8. Se A é uma matriz anti-simétrica (isto é, $A^t = -A$), mostre que as soluções do sistema diferencial linear $\dot{x} = Ax$ permanecem em superfícies esféricas centradas na origem.

Solução. Derivando $|x(t)|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$, obtém-se

$$[|x(t)|^2]' = \langle x'(t), x(t) \rangle + \langle x(t), x'(t) \rangle = 2 \cdot \langle Ax(t), x(t) \rangle = 2 \cdot \langle x(t), A^T x(t) \rangle.$$

Da hipótese, $\langle x(t), A^T x(t) \rangle = \langle x(t), -Ax(t) \rangle = -\langle Ax(t), x(t) \rangle$. Aí, $4 \cdot \langle Ax(t), x(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle Ax(t), x(t) \rangle = 0$ e a derivada é igual a zero. Portanto, $|x(t)|^2$ é constante, ou, equivalentemente, $|x(t)|$ é constante, de forma que todas as soluções do sistema linear pertencem a “superfícies esféricas centradas na origem”. ■

1.2 Diagrama Traço-Determinante

Seja A uma matriz real de ordem 2. Seu polinômio característico pode ser escrito da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow c_A(t) = \det(tI - A) = (t - a)(t - d) - bc = t^2 - (a + d)t + (ad - bc).$$

Escrevendo $T = \text{tr}(A) = a + d$ e $D = \det(A) = ad - bc$, tem-se

$$c_A(t) = t^2 - T \cdot t + D.$$

As soluções da equação $c_A(t) = 0$ são os autovalores de A , nominalmente:

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Considere, inicialmente, três casos distintos:

1. $T^2 - 4D > 0 \Leftrightarrow D < T^2/4$ (autovalores reais e distintos);
2. $T^2 - 4D = 0 \Leftrightarrow D = T^2/4$ (apenas um autovalor real);
3. $T^2 - 4D < 0 \Leftrightarrow D < T^2/4$ (autovalores complexos conjugados).

Para o primeiro caso, escreva λ_1, λ_2 para os autovalores distintos e $v_1 = [v_{11} \ v_{21}]^T$ e $v_2 = [v_{12} \ v_{22}]^T$ para as matrizes de coordenadas na base canônica de autovetores

associados a cada respectivo autovalor. A solução geral do sistema é da forma

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp(At) \cdot C = \exp\left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot C\right) \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \cdot C' = \begin{bmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{12}e^{\lambda_2 t} \\ v_{21}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.\end{aligned}$$

em que λ_1 e λ_2 são os autovalores, v_1 e v_2 são as matrizes de coordenadas na base canônica dos autovetores associados a cada respectivo autovalor e c_1, c_2 são as constantes que dizem respeito à condição inicial. E_1 e E_2 são os subespaços gerados por v_1 e v_2 , respectivamente, e $(x(t), y(t)) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$, as coordenadas da solução na base $\{v_1, v_2\}$.

1.1. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Nos eixos:

- i. Se $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$, então se tem uma semirreta em E_2 que parte de $(0, c_2)$ e se afasta da origem.
- ii. Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$, se tem uma semirreta em E_1 que também se afasta da origem.

Suponha que $c_1, c_2 \neq 0$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Estudando a derivada,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

De $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ segue que $\lim_{t \rightarrow -\infty} dy/dx = 0$.

Essas informações, unidas ao fato de que $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$, indicam que, à medida que t diminui, as trajetórias se aproximam da origem e a tangente se aproxima de E_1 .

Como a exponencial é uma função positiva, nenhuma trajetória passa por mudanças de sinal, de que forma que cada solução permanece no seu quadrante original. Para entender o que acontece quando t cresce, use i, ii, iii e iv para representar o quadrante, e observe:

- i. Se $c_1, c_2 > 0$, então $x(t), y(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dx = \infty$.
- ii. Se $c_1 < 0 < c_2$, então $x(t) \in (-\infty, 0)$ e $y(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dx = -\infty$.

- iii. Se $c_1, c_2 < 0$, então $x(t), y(t) \in (-\infty, 0)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dx = \infty$.
- iv. Se $c_2 < 0 < c_1$, então $x(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dx = -\infty$.

Portanto, à medida que t cresce, as trajetórias se afastam dos eixos e a tangente se aproxima de E_2 . Este é o caso chamado de **nó repulsivo**.

1.2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

A análise é completamente análoga a **1.1**, com a exceção de que o sinal de t é invertido, de forma que cada trajetória se aproxima da origem à medida que t cresce e se afasta dos eixos à medida que t decresce. Este é o caso chamado de **nó atrator**.

1.3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

Nos eixos:

- i. Se $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$, então se tem uma semirreta em E_2 que parte de $(0, c_2)$ e se afasta da origem.
- ii. Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$, se tem uma semirreta em E_1 que se aproxima da origem.

Suponha que $c_1, c_2 \neq 0$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Estudando a derivada,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

De $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ segue que $\lim_{t \rightarrow -\infty} dy/dx = 0$.

Novamente usando que a exponencial é uma função positiva, se percebe que nenhuma trajetória passa por mudanças de sinal, de que forma que cada solução permanece no seu quadrante original. Para refinar o entendimento, use i, ii, iii e iv para representar o quadrante, e observe:

- i. Se $c_1, c_2 > 0$, então $x(t), y(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dx = \infty$.
- ii. Se $c_1 < 0 < c_2$, então $x(t) \in (-\infty, 0)$ e $y(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dx = -\infty$.
- iii. Se $c_1, c_2 < 0$, então $x(t), y(t) \in (-\infty, 0)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dx = \infty$.
- iv. Se $c_2 < 0 < c_1$, então $x(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} dy/dx = -\infty.$$

Portanto, à medida que t diminui, as trajetórias se aproximam de E_1 e se afastam de E_2 , enquanto a tangente se aproxima de E_1 . À medida que t aumenta, as trajetórias se aproximam de E_2 e se afastam de E_1 , enquanto a tangente se aproxima de E_2 . Este é o caso chamado de **sela**.

1.4. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$.

A solução do sistema é $\varphi(t) = c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$. Assim, apenas a coordenada $y(t)$ se altera, produzindo uma semirreta paralela a E_2 .

Empregando a mesma notação para o quadrante,

- i. Se $c_1, c_2 > 0$, então $x(t), y(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$.
- ii. Se $c_1 < 0 < c_2$, então $x(t) \in (-\infty, 0)$ e $y(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$.
- iii. Se $c_1, c_2 < 0$, então $x(t), y(t) \in (-\infty, 0)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$.
- iv. Se $c_2 < 0 < c_1$, então $x(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$.

Cada solução se afasta de E_1 à medida que t cresce.

1.5. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$.

Da mesma forma que **1.1** e **1.2**, inverter o sinal do autovalor mantém a estrutura do retrato de fase das soluções, o que é alterado é somente o sentido de cada trajetória: nesse caso, cada solução se aproxima de E_1 à medida que t cresce.

2.1. $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 2$ (há autovetores linearmente independentes).

Usando a mesma notação que a empregada para o primeiro caso e escrevendo $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, a solução geral do sistema é do tipo

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp(At) \cdot C = \exp \left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot C \right) \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot C' = \begin{bmatrix} v_{11} e^{\lambda t} & v_{12} e^{\lambda t} \\ v_{21} e^{\lambda t} & v_{22} e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = (c_1 v_1 + c_2 v_2) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, cada trajetória é apenas o ponto inicial. Se $\lambda > 0$, cada trajetória é uma semirreta que parte de (c_1, c_2) e se afasta da origem. Se $\lambda < 0$, cada trajetória é uma semirreta que parte de (c_1, c_2) e se aproxima da origem.

2.2. $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 1$ (há autovetores generalizados).

Nesse caso, se v_2 é um autovetor generalizado, isto é, se v_2 satisfaz $(A - \lambda I)^2(v_2) = 0$ e $(A - \lambda I)(v_2) \neq 0$, e v_1 é um autovetor tal que $(A - \lambda I)(v_2) = v_1$, compondo um ciclo

de Jordan, segue que, empregando a teoria da forma canônica de Jordan para a matriz A e mantendo o resto da notação, a solução geral do sistema é:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp(At) \cdot C = \exp\left(\begin{bmatrix} v_{12} & v_{11} \\ v_{22} & v_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ t & \lambda t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} & v_{11} \\ v_{22} & v_{21} \end{bmatrix}^{-1} \cdot C\right) \\ &= \begin{bmatrix} v_{12} & v_{11} \\ v_{22} & v_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot C' = \begin{bmatrix} v_{12}e^{\lambda t} + v_{11}te^{\lambda t} & v_{11}e^{\lambda t} \\ v_{22}e^{\lambda t} + v_{21}te^{\lambda t} & v_{21}e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} \\ &= [(c_2t + c_1)v_1 + c_2v_2]e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

(Para acompanhar a inversão dos vetores, a ordem das constantes c_1 e c_2 também foi alterada na matriz C').

2.2.1. Suponha que $\lambda > 0$. No eixo E_1 , isto é, se $c_2 = 0$ e $c_1 \neq 0$, então se tem uma semirreta em E_1 que parte de $(c_1, 0)$ e se afasta da origem. Como se verá, nesse caso a análise no eixo E_2 não é trivial.

Suponha, portanto, que $c_2 \neq 0$. Antes de analisar caso a caso, observe que

$$(x(t), y(t)) = ((c_2t + c_1)e^{\lambda t}, c_2e^{\lambda t}).$$

Dessa forma,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \frac{\lambda c_2 e^{\lambda t}}{(\lambda c_2 t + \lambda c_1 + c_2)e^{\lambda t}} = \frac{\lambda c_2}{\lambda c_2 t + (\lambda c_1 + c_2)}.$$

Observe que o sinal da coordenada y não muda, para qualquer solução. Com isso em mente, considere os casos particulares:

- i. Se $c_2 > 0$, então $y(t) \in (0, \infty)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$. Por outro lado, o sinal da coordenada x da solução é determinado por $c_2t + c_1$, ou seja, toda órbita passa pelo primeiro e segundo quadrantes. Além disso, $\lim_{t \rightarrow -\infty} dy/dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} dy/dx = 0$, de forma que cada curva se aproxima do eixo E_1 quando t cresce ou decresce. Chame $a = (-\lambda c_1 - c_2)/(\lambda c_2)$. Note que $\lambda c_2 > 0$. Logo, se $t < a$, $dy/dx < 0$, ao passo que se $t > a$, então $dy/dx > 0$. Naturalmente, $\lim_{t \rightarrow a} |dy/dx| = +\infty$. Também é evidente que a coordenada x atinge o seu mínimo nesse ponto: como a órbita perpassa valores positivos e negativos de x , é necessário que $x(a) < 0$.
- ii. Se $c_2 < 0$, então $y(t) \in (-\infty, 0)$. Aí, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$. Nesse caso, também é fato que toda órbita passa pelo primeiro e segundo quadrantes. Além disso, $\lim_{t \rightarrow -\infty} dy/dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} dy/dx = 0$, de forma que cada curva se aproxima do eixo E_1 quando t cresce ou decresce. Mantenha a notação para o ponto a e analise novamente, atentando ao fato de que agora $\lambda c_2 < 0$: se $t < a$, $dy/dx < 0$, ao passo que se $t > a$, então $dy/dx > 0$. Mais uma vez, $\lim_{t \rightarrow a} |dy/dx| = +\infty$. A coordenada

x atinge o seu máximo nesse ponto: como a órbita perpassa valores positivos e negativos de x , é necessário que $x(a) > 0$.

Esse caso é chamado de **nó repulsor impróprio**.

2.2.2. Suponha que $\lambda < 0$. O estudo é completamente análogo a **2.2.1**, com a exceção de que o sentido das trajetórias é invertido. Este caso é chamado de **nó atrator impróprio**.

Para o terceiro caso, denote v_1 e v_2 para os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, respectivamente, como tem sido feito até então. A solução geral do sistema é dada pelo desenvolvimento a seguir, usando a forma de Jordan real da matriz A :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp(At) \cdot C = \exp\left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha t & -\beta t \\ \beta t & \alpha t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot C\right) \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & -e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{bmatrix} \cdot C' \\ &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} v_{11} \cos(\beta t) + v_{12} \sin(\beta t) & -v_{11} \sin(\beta t) + v_{12} \cos(\beta t) \\ v_{21} \cos(\beta t) + v_{22} \sin(\beta t) & -v_{21} \sin(\beta t) + v_{22} \cos(\beta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= v_1 e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) - c_2 \sin(\beta t)) + v_2 e^{\alpha t} (c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)).\end{aligned}$$

3.1. $\alpha = 0$ e o autovalor é um imaginário puro $i\beta$.

Nesse caso, a solução geral se torna

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \cos(\beta t)(c_1 v_1 + c_2 v_2) + \sin(\beta t)(-c_2 v_1 + c_1 v_2) \\ &= \cos(\beta t)w_1 + \sin(\beta t)w_2,\end{aligned}$$

evidentemente uma circunferência na base $\{w_1, w_2\}$ e, portanto, uma elipse centrada na origem com relação à base $\{v_1, v_2\}$. Esse caso é chamado de **centro**.

3.2. $\alpha > 0$.

Escrevendo a solução geral no mesmo formato que acima,

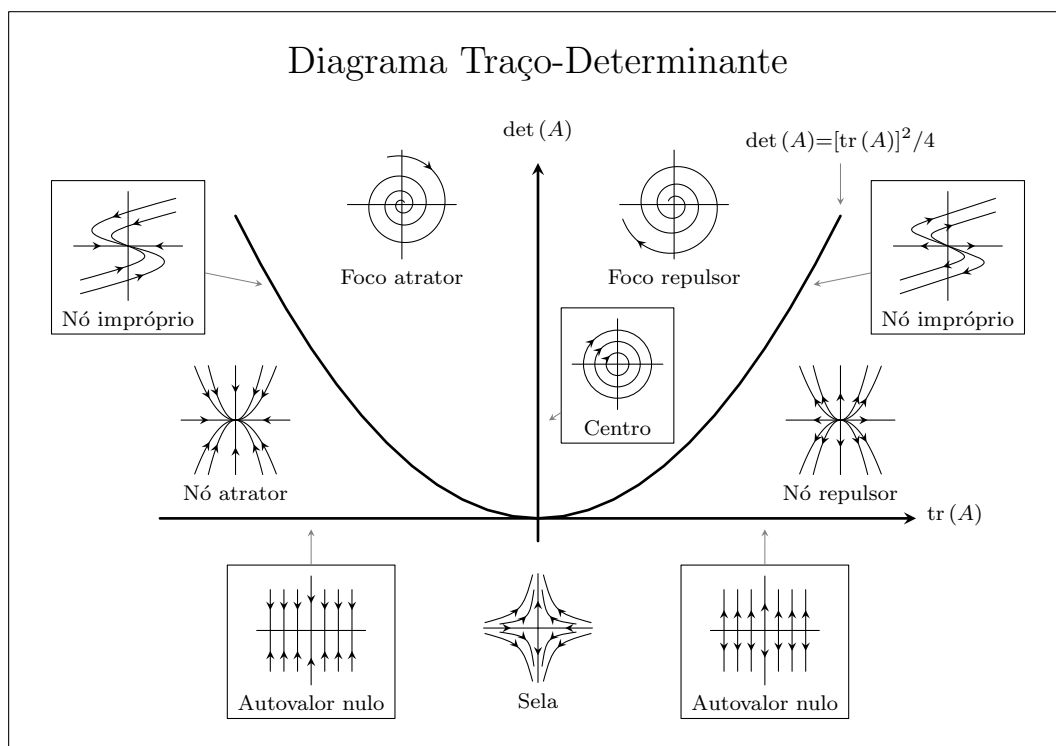
$$\varphi(t) = e^{\alpha t} [\cos(\beta t)w_1 + \sin(\beta t)w_2].$$

Escrevendo as coordenadas da solução com relação à base $\{w_1, w_2\}$ em formato polar, tem-se $r = e^{\alpha t}$ e $\theta = \beta t$. Assim, a distância da origem e o ângulo com relação a w_1 aumentam à medida que t cresce (e o contrário quando t diminui), se tratando de uma espiral centrada na origem. Evidentemente, dependendo dos autovetores v_1 e v_2 , se trata de uma espiral “amassada”, distorcida na base canônica. Esse caso é chamado de **foco repulsor**.

3.3. $\alpha < 0$.

Esta possibilidade é completamente análoga à anterior, com a exceção de que o sentido das trajetórias está invertido. É chamada de **foco atrator**.

Com a exceção do caso **2.1**, a classificação completa de sistemas 2×2 de equações diferenciais lineares homogêneas está representada no **Diagrama Traço-Determinante** abaixo, cuja execução foi inspirada em [6]:



1.3 Bifurcação de Hopf

1.3.1 Exercícios

Os exercícios abaixo foram extraídos do Capítulo 3 de [7].

Exercício 1.9. Considere a seguinte equação diferencial, que modela uma única população sob constante colheita.

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha,$$

em que x é o tamanho da população; r e K são a taxa de crescimento intrínseca e a capacidade de carga da população, respectivamente, e α é a taxa de colheita, um parâmetro de controle. Encontre um valor α_0 para o parâmetro no qual o sistema possui uma bifurcação sela-nó, e confira as condições do **Teorema 3.1** ([7], pp. 85-86). Explique também qual pode ser o resultado de colheita excessiva na dinâmica do ecossistema.

Solução. Para estudar as singularidades, faça $\dot{x} = 0$:

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha = 0 \Leftrightarrow -rx^2 + rKx - \alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 - Kx + \frac{\alpha}{r} = 0,$$

supondo, naturalmente, que $r \neq 0$. Logo,

$$x = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4\alpha/r}}{2}.$$

Se $K^2 - 4\alpha/r < 0 \Leftrightarrow \alpha > 4K^2r$, não há singularidades. Se, por outro lado, $\alpha = 4K^2r$, há um ponto de equilíbrio e, caso $\alpha < 4K^2r$, há dois pontos de equilíbrio, caracterizando uma bifurcação sela-nó em $\alpha_0 = 4K^2r$.

De fato, note que, quando $\alpha = 0$, tem-se equilíbrio em $x = 0$. Além disso, chamando $f(x, \alpha) = rx(1 - x/K) - \alpha$ e calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \alpha) = \frac{-2r}{K} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1 \neq 0,$$

percebe-se que as condições (A.1) e (A.2) do **Teorema 3.1** ([7], pp. 85-86) são satisfeitas, de forma que este sistema é topologicamente equivalente à forma normal da bifurcação sela-nó. Observe também que se α for suficientemente grande (nesse contexto, maior que $4K^2r$), não há pontos de equilíbrio e todas as trajetórias tendem a $-\infty$. ■

Exercício 1.10. *Verifique que*

$$\dot{z} = iz + (i + 1)z^2 + 2iz\bar{z} + (i - 1)\bar{z}^2$$

é a forma complexa do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{6}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{bmatrix},$$

dado que os autovetores são selecionados da forma

$$q = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + i \end{bmatrix}, \quad p = \frac{3}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 + i \\ 2i \end{bmatrix}.$$

Solução. Calcule $z = \langle p, x \rangle$:

$$\langle p, x \rangle = \frac{3}{2\sqrt{3}} \langle (1 + i, 2i), (x_1, x_2) \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} [(1 - i)x_1 + (-2i)x_2].$$

Assim, $z = (\sqrt{3}/2 \cdot x_1) + i \cdot (-\sqrt{3}/2 \cdot x_1 - \sqrt{3} \cdot x_2)$. Note que, de fato,

$$z \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + i \end{bmatrix} + \bar{z} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 - i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2(z + \bar{z}) \\ -1(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \cdot x_1 \\ -\sqrt{3} \cdot x_1 + \sqrt{3} \cdot x_1 + 2\sqrt{3} \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a teoria desenvolvida no capítulo, z satisfaz a equação

$$\dot{z} = \lambda z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle,$$

em que λ é o autovalor associado a q e $F(x_1, x_2) = 6/\sqrt{3} [0 \ x_1x_2]^T$. Aí,

$$\begin{aligned} F(zq + \bar{z}\bar{q}) &= \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4 \cdot 3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2(z + \bar{z})[-1(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z})] \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ -(z + \bar{z})^2 + i(z^2 - \bar{z}^2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ (-1 + i)z^2 + (-1 - i)\bar{z}^2 - 2z\bar{z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle &= -\sqrt{3}i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} [(-1 + i)z^2 + (-1 - i)\bar{z}^2 - 2z\bar{z}] \\ &= (i + 1)z^2 + 2iz\bar{z} + (i - 1)\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Para encontrar λ , faça

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2i \\ -1 - i \end{bmatrix} = i \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + i \end{bmatrix} \right).$$

Assim, $\lambda = i$ e

$$\dot{z} = iz + (i + 1)z^2 + 2iz\bar{z} + (i - 1)\bar{z}^2,$$

como desejado. ■

Exercício 1.11. *Escreva o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xy + 2y^2, \\ \dot{y} = x - x^2y, \end{cases}$$

em termos da coordenada complexa $z = x + iy$, e compute o coeficiente normal $c_1(0)$ através da fórmula (3.18) ([7], p. 98).

Solução. Comece reescrevendo o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -xy + 2y^2 \\ -x^2y \end{bmatrix}.$$

Os autovalores da matriz jacobiana são $\pm i$. Sejam q o autovetor escolhido associado a i e p o autovetor da transposta associado a $-i$. Como a mudança final de variáveis é

$z = x + iy$ e $(x, y) = zq + \bar{z}\bar{q}$, tem-se que

$$\begin{cases} x = (x + iy)q_x + (x - iy)\bar{q}_x, \\ y = (x + iy)q_y + (x - iy)\bar{q}_y. \end{cases}$$

Naturalmente, a única solução possível é $q_x = 1/2$ e $q_y = -i/2$.

$$q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

E, de fato,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -i/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1/2 \\ -i/2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$zq + \bar{z}\bar{q} = z \begin{bmatrix} 1/2 \\ -i/2 \end{bmatrix} + \bar{z} \begin{bmatrix} 1/2 \\ i/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z + \bar{z} \\ -i(z - \bar{z}) \end{bmatrix},$$

e então

$$\begin{aligned} F(zq + \bar{z}\bar{q}) &= \begin{bmatrix} -(1/2)(z + \bar{z}) \cdot (-i/2)(z - \bar{z}) + 2(-i/2)^2(z - \bar{z})^2 \\ -(1/2)^2(z + \bar{z})^2 \cdot (-i/2)(z - \bar{z}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (i/4)(z^2 - \bar{z}^2) - (1/2)(z - \bar{z})^2 \\ (i/8)(z^2 - \bar{z}^2)(z + \bar{z}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, veja que $z = \langle p, (x, y) \rangle$, o que implica que $p = (1, -i)$. Evidentemente,

$$\langle p, q \rangle = 1/2 \cdot 1 + (i/2) \cdot (-i) = 1.$$

Note também que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix},$$

como esperado. Aí,

$$g(z, \bar{z}) = \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle = (i/4)(z^2 - \bar{z}^2) - (1/2)(z - \bar{z})^2 + (1/8)(z^2 - \bar{z}^2)(z + \bar{z}).$$

A equação resultante escrita em z é

$$\dot{z} = iz + g(z, \bar{z}).$$

Para calcular $c_1(0)$, é preciso conhecer g_{20}, g_{11}, g_{02} e g_{21} , além de $w_0 = 1$. Para tal, é preciso calcular as funções multilineares simétricas $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})$:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2;$$

Comece calculando tais derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=0} &= 0, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=0} &= 4, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} &= -1, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} &= -1; \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=0} &= 0, & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=0} &= 0, & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} &= 0, & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, escrevendo as coordenadas de $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ como C_1, C_2 e C_3 ,

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \xi_k \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2, 3.$$

É fácil ver que todas as derivadas de terceira ordem da primeira entrada são nulas, pois cada monômio possui grau 2. Por outro lado, quanto à segunda entrada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1^3} \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2^3} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} = 0, \\ \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} = -2. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2(x_1 y_1 u_2 + x_1 y_2 u_1 + x_2 y_1 u_1) \end{bmatrix}.$$

Aí, calcule os valores desejados:

$$\begin{aligned} B(q, q) &= \begin{bmatrix} -q_1 q_2 - q_2 q_1 + 4q_2 q_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + i/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B(q, \bar{q}) &= \begin{bmatrix} -q_1 \bar{q}_2 - q_2 \bar{q}_1 + 4q_2 \bar{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B(\bar{q}, \bar{q}) &= \begin{bmatrix} -\bar{q}_1 \bar{q}_2 - \bar{q}_2 \bar{q}_1 + 4\bar{q}_2 \bar{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - i/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C(q, q, \bar{q}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2(q_1^2 \bar{q}_2 + 2q_1 \bar{q}_1 q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i/4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$g_{20} = -1 + i/2, \quad g_{11} = 1, \quad g_{02} = -1 - i/2, \quad g_{21} = 1/4.$$

Compute $c_1(0)$:

$$c_1(0) = \frac{i}{2 \cdot 1} \left[\left(-1 + \frac{i}{2} \right) - 2 - \frac{1}{3} \left| -1 - \frac{i}{2} \right|^2 \right] + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} - \frac{41}{24}i. \quad \blacksquare$$

Exercício 1.12. *Verifique que cada um dos sistemas a seguir possui um equilíbrio que exibe bifurcação de Hopf em algum valor de α , e compute o primeiro coeficiente de Lyapunov:*

(a) *Equação de Rayleigh:*

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 - 2\alpha\dot{x} + x = 0;$$

(b) *Oscilador de Van der Pol:*

$$\ddot{y} - (\alpha - y^2)\dot{y} + y = 0$$

(c) *Exemplo de Bautin:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \alpha y + x^2 + xy + y^2; \end{cases}$$

(d) *Modelo de difusão de anúncios:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha[1 - x_1x_2^2 + A(x_2 - 1)], \\ \dot{x}_2 = x_1x_2^2 - x_2. \end{cases}$$

Solução. (a) Chame $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ e construa o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2\alpha x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2^3 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \quad F((x_1, x_2), \alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2^3 \end{bmatrix}.$$

Calcule os autovalores:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Para $|\alpha| < 1$, os autovalores são complexos e

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha) = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Em particular, em $\alpha = 0$, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio e $\lambda(0) = i$, $\overline{\lambda(0)} = -i$. Assim, $\omega_0 = 1 > 0$ e o sistema exibe uma bifurcação de Hopf em $\alpha = 0$.

Para calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov, escolha um autovetor $q(\alpha)$ relativo a $\lambda(\alpha)$:

$$\begin{bmatrix} -\lambda(\alpha) & 1 \\ -1 & \lambda(\alpha) \end{bmatrix} q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\overline{\lambda(\alpha)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q(\alpha) = 0.$$

Tome $q(\alpha) = [\overline{\lambda(\alpha)} \quad 1]^T$. Em particular, $q = q(0) = [-i \quad 1]^T$. Para escolher $p(\alpha)$, veja que

$$\begin{bmatrix} -\overline{\lambda(\alpha)} & -1 \\ 1 & \lambda(\alpha) \end{bmatrix} p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda(\alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p(\alpha) = 0.$$

Assim, $p_1(\alpha) = -\lambda(\alpha)p_2(\alpha)$. Além disso, para que o sinal de $l_1(0)$ seja preservado, é necessário que $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$, isto é,

$$\overline{p_1(\alpha)\lambda(\alpha)} = 1 - \overline{p_2(\alpha)} \Leftrightarrow \overline{p_1(\alpha)\lambda(\alpha) + p_2(\alpha)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} p_1(\alpha) = -\lambda(\alpha)[1 - \lambda(\alpha)^2]^{-1}, \\ p_2(\alpha) = [1 - \lambda(\alpha)^2]^{-1}. \end{cases}$$

Em particular, $p = p(0) = [-i/2 \quad 1/2]^T$. Construa agora as funções multilineares B e C . Como F não possui termos de ordem 2, é evidente que $B = 0$. Por outro lado,

$$\left. \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2^3}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = -6.$$

Assim,

$$C(x, y, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6x_2y_2u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow C(q, q, \bar{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, $g_{20} = g_{11} = 0$ e

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3.$$

Então,

$$i\tilde{g}_{20}g_{11} + \omega_0g_{21} = 0 + 1 \cdot (-3) = -3 \Rightarrow l_1(0) = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}.$$

É evidente que $\mu'(0) = 1 \neq 0$. Aí, as condições (B.1) e (B.2) do **Teorema 3.3** ([7], p. 100) estão satisfeitas e o sistema é, de fato, topologicamente equivalente à forma normal da bifurcação de Hopf (supercrítica).

(b) Chame $y_1 = y$ e $y_2 = \dot{y}$ e construa o sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -y_1 + \alpha y_2 - y_1^2 y_2. \end{cases}$$

Em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1^2 y_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad F((y_1, y_2), \alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1^2 y_2 \end{bmatrix}.$$

Calcule os autovalores:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}.$$

Para $|\alpha| < 2$, os autovalores são complexos e

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha) = \frac{\alpha}{2} + i\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Em particular, em $\alpha = 0$, $(y_1, y_2) = (0, 0)$ é solução de equilíbrio e $\lambda(0) = i$, $\overline{\lambda(0)} = -i$. Portanto, $\omega_0 = 1 > 0$ e o sistema exibe bifurcação de Hopf em $\alpha = 0$.

Para calcular $l_1(0)$, escolha $q(\alpha)$:

$$\begin{bmatrix} \lambda(\alpha) & 1 \\ -1 & \alpha - \lambda(\alpha) \end{bmatrix} q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\overline{\lambda(\alpha)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q(\alpha) = 0.$$

Tome $q(\alpha) = [\overline{\lambda(\alpha)} \quad 1]^T$. Em particular, $q = q(0) = [-i \quad 1]^T$. A escolha de $p(\alpha)$ é, evidentemente, a mesma do exercício anterior:

$$p(\alpha) = \begin{bmatrix} -\lambda(\alpha)[1 - \lambda(\alpha)^2]^{-1} \\ [1 - \lambda(\alpha)^2]^{-1} \end{bmatrix}, \quad p = p(0) = \begin{bmatrix} -i/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Construa as funções multilineares B e C . Há somente termo não linear de ordem três, o que implica que $B = 0$ novamente. Além disso,

$$\left. \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_1}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1^2}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = -2.$$

Dessa forma,

$$C(x, y, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2(x_1 y_1 u_2 + x_1 y_2 u_1 + x_2 y_1 u_1) \end{bmatrix}.$$

Então,

$$C(q, q, \bar{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot [(-i)^2 + (-i)i + (-i)i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Segue que $g_{20} = g_{11} = 0$ e

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

Por fim,

$$ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21} = 0 + 1 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow l_1(0) = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}.$$

É evidente que $\mu'(0) = 1/2 \neq 0$. Assim, as condições (B.1) e (B.2) do **Teorema 3.3** são satisfeitas e o sistema é topologicamente equivalente à forma normal da bifurcação de Hopf (supercrítica).

(c) Em formato matricial, o sistema passa a ser

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 + xy + y^2 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad F((x, y), \alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 + xy + y^2 \end{bmatrix}.$$

Como $A(\alpha)$ é a mesma, $\lambda(\alpha)$ é idêntico ao do exercício anterior, com o sistema exibindo bifurcação de Hopf em $\alpha = 0$. Escolha os mesmos vetores $p(\alpha), q(\alpha)$. Partindo para o cálculo dos vetores multilineares, veja que $C = 0$, visto que não há termos de ordem três no sistema. Por outro lado,

$$\left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_1^2}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_2^2}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = 2, \quad \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}(\xi, 0) \right|_{\xi=0} = 1.$$

Assim,

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$B(q, q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(-i)^2 + 2(-i) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2i \end{bmatrix}, \quad B(q, \bar{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2i(-i) - i + i + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, $g_{21} = 0$ e

$$g_{20} = -i, \quad g_{11} = 2 \Rightarrow ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21} = i(-i) \cdot 2 + 0 = 2 \rightarrow l_1(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Como $\mu'(0) = 1/2$, o sistema é topologicamente equivalente à forma normal da bi-

furcação de Hopf (subcrítica).

(d) Ao contrário dos sistemas acima, o equilíbrio não se dá quando $x = 0$, de forma que o sistema precisa ser transladado. Veja que se $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, então

$$x_1 x_2^2 = x_2 \Rightarrow \alpha[1 - x_2 + Ax_2 - A] = 0 \Leftrightarrow (A - 1)x_2 = A - 1.$$

Segundo a formulação original do modelo, $0 \leq A < 1$, de forma que $A - 1 \neq 0$ e aí $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$. Portanto, $(x_1, x_2) = (1, 1)$ é o equilíbrio do sistema. Estudando a matriz jacobiana do sistema no equilíbrio, tem-se

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha(A - 2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha - 1)\lambda - \alpha(A - 1) = 0.$$

Dessa forma,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - \alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 + \alpha(A - 1)}$$

Quando $\alpha = 1$,

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{A - 1} = \pm i\sqrt{1 - A},$$

em que $\omega = \sqrt{1 - A} > 0$. Se verifica, portanto, bifurcação de Hopf em $\alpha = 1$, com equilíbrio $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Para calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov, fixe $\alpha = 1$ e translate as coordenadas do equilíbrio para a origem substituindo:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 1, \\ y_2 = x_2 - 1. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 1 - (y_1 + 1)(y_2 + 1)^2 + Ay_2, \\ \dot{y}_2 = (y_1 + 1)(y_2 + 1)^2 - (y_2 + 1). \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + (A - 2)y_2 - y_1 y_2^2 - 2y_1 y_2 - y_2^2, \\ \dot{y}_2 = y_1 + y_2 + y_1 y_2^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2. \end{cases}$$

Em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & A - 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_1 y_2^2 - 2y_1 y_2 - y_2^2 \\ y_1 y_2^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2 \end{bmatrix}.$$

Escolha agora o autovetor q :

$$\begin{bmatrix} -1 - i\sqrt{1 - A} & A - 2 \\ 1 & 1 - i\sqrt{1 - A} \end{bmatrix} q = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 - i\sqrt{1 - A} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q = 0.$$

Escolha, em particular, $q = [-1 + i\sqrt{1-A} \ 1]^T$. Para p , é necessário que:

$$\begin{bmatrix} -1 + i\sqrt{1-A} & 1 \\ A-2 & 1 + i\sqrt{1-A} \end{bmatrix} p = 0 \Leftrightarrow (-1 + i\sqrt{1-A})p_1 + p_2 = 0.$$

Além disso,

$$(-1 + i\sqrt{1-A})\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 1 \Leftrightarrow (-1 - i\sqrt{1-A})p_1 + p_2 = 1.$$

Logo, $(2i\sqrt{1-A})p_1 = -1$, de forma que

$$p_1 = -\frac{1}{2i\sqrt{1-A}}, \quad p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\sqrt{1-A}}.$$

Agora estude as derivadas de $F(y_1, y_2)$ para encontrar as funções B e C :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_1^2}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= 0, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}(\xi) \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_2^2}(\xi) \Big|_{\xi=0} = -2, \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_1^2}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= 0, & \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}(\xi) \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_2^2}(\xi) \Big|_{\xi=0} = 2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} -2(x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2^2) \\ 2(x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2^2) \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial^3 F_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1 \partial \xi_2}(\xi) \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1}(\xi) \Big|_{\xi=0} = -2, \\ \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1 \partial \xi_2}(\xi) \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1}(\xi) \Big|_{\xi=0} = 2. \end{aligned}$$

Segue que

$$C(x, y, u) = \begin{bmatrix} -2(x_1 y_2 u_2 + x_2 y_1 u_2 + x_2 y_2 u_1) \\ 2(x_1 y_2 u_2 + x_2 y_1 u_2 + x_2 y_2 u_1) \end{bmatrix}.$$

Aí,

$$B(q, q) = \begin{bmatrix} -2[2(-1 + i\sqrt{1-A}) + 1] \\ 2[2(-1 + i\sqrt{1-A}) + 1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 4i\sqrt{1-A} \\ -2 + 4i\sqrt{1-A} \end{bmatrix},$$

$$B(q, \bar{q}) = \begin{bmatrix} -2[(-1 + i\sqrt{1-A}) + (-1 - i\sqrt{1-A}) + 1] \\ 2[(-1 + i\sqrt{1-A}) + (-1 - i\sqrt{1-A}) + 1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, q, \bar{q}) = \begin{bmatrix} -2[2(-1 + i\sqrt{1-A}) + (-1 - i\sqrt{1-A})] \\ 2[2(-1 + i\sqrt{1-A}) + (-1 - i\sqrt{1-A})] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2i\sqrt{1-A} \\ -6 + 2i\sqrt{1-A} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g_{20} &= \frac{1}{2i\sqrt{1-A}} \cdot (2 - 4i\sqrt{1-A}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i\sqrt{1-A}} \right) \cdot (-2 + 4i\sqrt{1-A}) \\ &= \left[\frac{1}{2i\sqrt{1-A}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\sqrt{1-A}} \right] (2 - 4i\sqrt{1-A}) = -1 + 2i\sqrt{1-A}, \end{aligned}$$

$$g_{11} = \frac{1}{2i\sqrt{1-A}} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i\sqrt{1-A}} \right) \cdot (-2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1,$$

$$\begin{aligned} g_{21} &= \frac{1}{2i\sqrt{1-A}} \cdot (6 - 2i\sqrt{1-A}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i\sqrt{1-A}} \right) \cdot (-6 + 2i\sqrt{1-A}) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (6 - 2i\sqrt{1-A}) = -3 + i\sqrt{1-A}. \end{aligned}$$

Se infere então que

$$\begin{aligned} ig_{20}g_{11} + \omega g_{21} &= i(-1 + 2i\sqrt{1-A})(-1) + \sqrt{1-A}(-3 + i\sqrt{1-A}) \\ &= i + 2\sqrt{1-A} - 3\sqrt{1-A} + i(1-A) \\ &= -\sqrt{1-A} + i(2-A). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$l_1(1) = \frac{1}{2\sqrt{1-A}} \operatorname{Re}(-\sqrt{1-A} + i(2-A)) = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

É evidente que as condições do **Teorema 3.3** ([7], p. 100) são satisfeitas, visto que $\mu'(1) = -1/2 \neq 0$, de forma que o sistema é topologicamente equivalente à forma normal da bifurcação de Hopf (supercrítica). ■

1.4 Fluxo Tubular

1.4.1 Teorema de Picard-Lindelöf

Referências para a parte teórica desta seção: [9, 14].

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Escolha reais positivos a, b e defina $I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}$, em que $\|\cdot\|$ é a norma usual de \mathbb{R}^n . Denote d_0 para a métrica induzida por tal norma em \mathbb{R}^n , isto é, $d_0(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Lema 1.13. *Seja $X = C(I_a, B_b)$ o conjunto das funções contínuas de domínio I_a e*

contradomínio B_b . A expressão

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_a} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|,$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ define uma função $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$. Além disso, para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, existe $t_0 \in I_a$ satisfazendo

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\|.$$

Demonstração. Para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_1)\| &\leq \|\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_2)\| + \|\varphi_1(t_2) - \varphi_2(t_2)\| + \|\varphi_2(t_2) - \varphi_2(t_1)\|, \\ \|\varphi_1(t_2) - \varphi_2(t_2)\| &\leq \|\varphi_1(t_2) - \varphi_1(t_1)\| + \|\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_1)\| + \|\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_2)\|, \end{aligned}$$

de forma que

$$\left| \|\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_1)\| - \|\varphi_1(t_2) - \varphi_2(t_2)\| \right| \leq \|\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_2)\| + \|\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_2)\|.$$

Fixe $t_3 \in I_a$. Como φ_1 e φ_2 são contínuas em t_3 , dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ satisfazendo

$$|t - t_3| < \delta_1 \Rightarrow \|\varphi_1(t) - \varphi_1(t_3)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |t - t_3| < \delta_2 \Rightarrow \|\varphi_2(t) - \varphi_2(t_3)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escolhendo $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, $|t - t_3| < \delta$ implica que

$$\left| \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| - \|\varphi_1(t_3) - \varphi_2(t_3)\| \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, a função $\Phi(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$ é contínua em I_a e vale o **Teorema de Weierstrass**, isto é, tal função é limitada e assume valor máximo em I_a . Dessa forma, d é, de fato, uma função definida em $X \times X$ (o supremo é sempre um real não negativo) e, se t_0 é o ponto de máximo, então vale a segunda expressão do enunciado, concluindo a prova. \square

Teorema 1.14. (X, d) é um espaço métrico.

Demonstração. Dadas $\varphi_1, \varphi_2 \in X$,

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \Leftrightarrow \sup_{t \in I_a} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq 0 \quad \forall t \in I_a,$$

isto é, $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_a$, o mesmo que $\varphi_1 = \varphi_2$, satisfazendo a positividade. A simetria também segue trivialmente da simetria da métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^n .

Para demonstrar a desigualdade triangular, use a segunda parte do **Lema 1.13**: dadas

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in X$, existe $t_0 \in I_a$ tal que

$$\begin{aligned} d(\varphi_1, \varphi_2) &= \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| \leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi_3(t_0)\| + \|\varphi_3(t_0) - \varphi_2(t_0)\| \\ &\leq d(\varphi_1, \varphi_3) + d(\varphi_3, \varphi_2), \end{aligned}$$

completando a demonstração. \square

Lema 1.15. *Seja (x_k) uma sequência em \mathbb{R}^n que converge para x . Então, $(\|x_k\|)$ converge para $\|x\|$, isto é,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right\|.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo $k \geq N \Rightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon$. Da desigualdade triangular,

$$\left| \|x_k\| - \|x\| \right| \leq \|x_k - x\| < \varepsilon,$$

o que implica o resultado desejado. \square

Lema 1.16. *Seja (φ_k) uma sequência de funções em X que converge uniformemente para $\varphi \in \mathcal{F}(I_a, B_b)$. Então, $\varphi \in X$ e (φ_k) converge para φ em (X, d) .*

Demonstração. Tome $t_1 \in I_a$ e escolha $\varepsilon > 0$ qualquer. Da convergência uniforme de (φ_k) , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N \Rightarrow \|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon/3$ para todo $t \in I_a$. Além disso, segue da continuidade dos elementos de (φ_k) que existe $\delta > 0$ satisfazendo $|t - t_1| < \delta \Rightarrow \|\varphi_N(t) - \varphi_N(t_1)\| < \varepsilon/3$. Portanto, se $|t - t_1| < \delta$, então

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi(t_1)\| &\leq \|\varphi(t) - \varphi_N(t)\| + \|\varphi_N(t) - \varphi_N(t_1)\| + \|\varphi_N(t_1) - \varphi(t_1)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, φ é contínua em I_a , ou, equivalentemente, $\varphi \in X$. Resta provar a convergência em (X, d) : dado $\varepsilon > 0$, segue novamente da convergência uniforme de (φ_k) que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N \Rightarrow \|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon/2$ para todo $t \in I_a$, o mesmo que $\sup_{t \in I_a} \|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon/2$. Logo, $k \geq N \Rightarrow d(\varphi_k, \varphi) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, isto é, (φ_k) converge para φ em (X, d) , como se queria demonstrar. \square

Teorema 1.17. *(X, d) é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em (X, d) é convergente.*

Demonstração. Seja (φ_k) uma sequência de Cauchy em (X, d) . Logo, fixado $t \in I_a$, a sequência $(\varphi_k(t))$ é uma sequência de Cauchy em (\mathbb{R}^n, d_0) e, sendo esse espaço métrico completo, tal sequência converge. Assim, defina a função $\varphi \in \mathcal{F}(I_a, B_b)$,

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t).$$

Comece observando que, de fato, $\varphi(t) \in B_b$ para todo $t \in I_a$ pois B_b é compacto e, portanto, fechado, de forma que contém todos os seus pontos de acumulação, em particular o limite da sequência $(\varphi_k(t))$.

Escolha $\varepsilon > 0$ qualquer. Por hipótese, existe N natural satisfazendo $k, l \geq N \Rightarrow d(\varphi_k, \varphi_l) < \varepsilon/2$, isto é,

$$\sup_{t \in I_a} \|\varphi_k(t) - \varphi_l(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|\varphi_k(t) - \varphi_l(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } t \in I_a.$$

Segundo o **Lema 1.15**, dados $k \in \mathbb{N}$ e $t \in I_a$,

$$\|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| = \left\| \varphi_k(t) - \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_l(t) \right\| = \lim_{l \rightarrow \infty} \|\varphi_k(t) - \varphi_l(t)\|.$$

Assim, se $k \geq N$, então para todo $t \in I_a$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|\varphi_k(t) - \varphi_l(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon,$$

ou seja, (φ_k) converge uniformemente para φ . Segundo o **Lema 1.16**, $\varphi \in X$ e (φ_k) converge para φ em (X, d) , como desejado. \square

Lema 1.18. *Seja (Y, d_Y) um espaço métrico. Uma função $F: Y \rightarrow Y$ é chamada de contração se existe $K \in \mathbb{R}$, $0 \leq K < 1$, tal que, para todo $x, y \in Y$,*

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K \cdot d_Y(x, y).$$

Toda contração é contínua.

Demonstração. A continuidade segue trivialmente do fato de que

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K \cdot d_Y(x, y) < d_Y(x, y),$$

de forma que qualquer escolha de δ garante o resultado. \square

Lema 1.19 (Lema da Contração). *Seja (Y, d_Y) um espaço métrico completo e $F: Y \rightarrow Y$ uma contração. Então, existe um único ponto fixo p por F , ou seja, $F(p) = p$. Mais ainda, p é um atrator de F : definindo $F^0 = F$ e $F^n = F \circ F^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $F^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Tome $x \in Y$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, observe que

$$d_Y(F^{n+r}(x), F^n(x)) \leq K^n \cdot d_Y(F^r(x), x)$$

para todo $n, r \in \mathbb{N}$. Empregando a desigualdade triangular,

$$d_Y(F^r(x), x) \leq \sum_{j=1}^r d_Y(F^j(x), F^{j-1}(x)) \leq \sum_{j=1}^r K^{j-1} \cdot d_Y(F(x), x).$$

Como $K \leq 1$, tem-se que a série geométrica $\sum_{j=1}^{\infty} K^{j-1} = 1 + K + K^2 + \dots$ converge para $1/(1-K)$. Sendo os termos da série todos não negativos,

$$\sum_{j=1}^r K^{j-1} \cdot d_Y(F(x), x) \leq \frac{1}{1-K} \cdot d_Y(F(x), x).$$

Portanto,

$$d_Y(F^{n+r}(x), F^n(x)) \leq \frac{K^n}{1-K} \cdot d_Y(F(x), x).$$

Se $d_Y(F(x), x) = 0$ não há mais nada a fazer. Suponha então que $d_Y(F(x), x) \neq 0$. Naturalmente, $K^n/(1-K) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{K^n}{1-K} < \frac{\varepsilon}{d_Y(F(x), x)} \Rightarrow d_Y(F^{n+r}(x), F^n(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo } r \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $(F^n(x))$ é uma sequência de Cauchy. Sendo (Y, d_Y) completo, tal sequência converge para um certo $p \in Y$. Sendo F uma contração (segundo o **Lema 1.18**, uma função contínua),

$$F(p) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) = p.$$

Se p' é ponto fixo de F , então

$$d(p, p') = d(F(p), F(p')) \leq K \cdot d(p, p').$$

Se $d(p, p') \neq 0$, então $d(p, p') \leq K \cdot d(p, p') < d(p, p')$, absurdo. Logo, $d(p, p') = 0 \Leftrightarrow p = p'$, completando a prova. \square

Lema 1.20. *Seja (Y, d_Y) um espaço métrico completo. Se $F: Y \rightarrow Y$ é contínua e, para algum $m \in \mathbb{N}$, F^m é uma contração, então existe um único ponto fixo p por F . Mais ainda, p é um atrator de F .*

Demonstração. Seja p o ponto fixo de F^m garantido pelo **Lema 1.19**. Como a sequência $((F^m)^n(x))_n$ converge para p para todo $x \in Y$ também de acordo com o **Lema 1.19**, cada sequência $((F^m)^k(F^l(x)))_k$ com $l = 0, 1, \dots, m$ também converge para p . Aí, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $N_0, N_1, \dots, N_m > 0$ satisfazendo

$$k \geq N_l \Rightarrow d_Y((F^m)^k(F^l(x)), p) < \varepsilon, \quad \text{para todo } 0 \leq l < m.$$

Se $N = \min\{N_0, N_1, \dots, N_m\}$, então tome $n \geq m(N+1)$. Da divisão euclidiana, existem $k_n, l_n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n = mk_n + l_n$, com $0 \leq l_n < m$. Logo,

$$mk_n + l_n \geq m(N+1) = mN + m \Leftrightarrow k_n \geq N + 1 - \frac{l_n}{m} > N.$$

Em particular, $k_n \geq N_{l_n}$, de forma que $d_Y((F^m)^{k_n}(F^{l_n}(x)), p) = d_Y(F^n(x), p) < \varepsilon$.

Portanto, $(F^n(x))$ converge para p . Este é ponto fixo:

$$F(p) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) = p.$$

É evidente que este ponto fixo é único: qualquer ponto fixo de F é ponto fixo de F^m , e esta possui apenas p como ponto fixo, concluindo a demonstração. \square

Teorema 1.21 (Teorema de Picard-Lindelöf). *Uma função $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita Lipschitziana em Ω relativamente à segunda da variável se existe $K \in \mathbb{R}$, $K \geq 0$, tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sejam $\Omega = I_a \times B_b$ e f uma tal função que é também contínua. Logo, f é limitada, isto é, existe $M \geq 0$ tal que $\|f(t, x)\| \leq M$ para todo $(t, x) \in \Omega$. Então, existe uma única solução para

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

em I_α , em que $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Demonstração. Seja $Y = C(I_\alpha, B_b)$ e d_Y a métrica do **Teorema 1.17**. De acordo com tal resultado, (Y, d_Y) é um espaço métrico completo. Defina $F: Y \rightarrow Y$,

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Veja que, de fato, $F(\varphi) \in Y$ para toda $\varphi \in Y$: a continuidade de f e φ é preservada pela composição e pela integral, além de que

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq \alpha M \leq b.$$

Veja que, dados $m \in \mathbb{N}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$,

$$\|F^m(\varphi_1)(t) - F^m(\varphi_2)(t)\| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d_Y(\varphi_1, \varphi_2):$$

O caso base $m = 0$ segue da definição da métrica d_Y . Suponha então verdadeira para $m = k \geq 0$. Aí,

$$\begin{aligned} \|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)\| &= \|F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, F^k(\varphi_1)(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, F^k(\varphi_2)(s)) ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K \|F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)\| ds \right|. \end{aligned}$$

Empregando a hipótese,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t K \|F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)\| ds \right| &\leq K \left| \int_{t_0}^t \frac{K^k |s - t_0|^k}{k!} d_Y(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| \\ &= \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d_Y(\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned}$$

completando a indução. Além disso, note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(K|t - t_0|)^n}{n!} = e^{K|t-t_0|},$$

de forma que $(K|t - t_0|)^n/n! \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, é possível escolher n tal que $K^n|t - t_0|^n/n! < 1$, o que implica que F^n é uma contração. Segundo o **Lema 1.20**, existe um único ponto fixo para tal função, sendo esta a solução desejada para o problema de valor inicial, como se queria demonstrar. \square

1.4.2 Teorema do Fluxo Tubular

Referências para a parte teórica desta seção: [2, 12].

Definição 1.22. Uma família de transformações $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ para $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_0 = \text{Id}$ e

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}$$

é chamada *fluxo*.

Exemplo 1.23. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua tal que cada problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possui solução única $x(t, x_0)$ definida para $t \in \mathbb{R}$, então a família de transformações definida por

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$$

é um *fluxo*.

Lema 1.24. Sejam (c_n) uma sequência de números reais não negativos satisfazendo

$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$. Então, se

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^n c_{n-i} \lambda^i,$$

segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$.

Demonstração. Seja $M_k = \max \{c_i : i \geq k\}$. Veja que

$$M_{k+1} = \max \{c_i : i \geq k+1\} \leq \max \{c_i : i \geq k\} = M_k,$$

isto é, (M_k) é decrescente. Tome $\varepsilon > 0$ arbitrário, de forma que, por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |c_n| < \varepsilon$. Logo, $M_{n_0} < \varepsilon$ e, sendo (M_k) decrescente, $n \geq n_0 \Rightarrow |M_n| < \varepsilon$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$.

Fixe $n, k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $k < n$. Em seguida, perceba que

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{i=0}^{n-k} c_{n-i} \lambda^i + \sum_{i=n-k+1}^n c_{n-i} \lambda^i \leq \sum_{i=0}^{n-k} M_{n-i} \lambda^i + \sum_{i=n-k+1}^n M_{n-i} \lambda^i \\ &\leq M_k \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i + M_0 \lambda^{n-k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{M_k}{1-\lambda} + M_0 \frac{\lambda^{n-k+1}}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Tome $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$, o resultado segue. \square

Lema 1.25. *Seja (X, d_X) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em X convergindo a $x \in X$. Dado $y \in Y$, $d(x_n, y)$ converge para $d(x, y)$.*

Demonstração. Tome $\varepsilon > 0$ qualquer. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$. Aí, segundo a desigualdade triangular,

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y) < \varepsilon + d(x, y) \Leftrightarrow |d(x_n, y) - d(x, y)| < \varepsilon,$$

concluindo a prova. \square

Teorema 1.26. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Considere também as funções $T_1: X \rightarrow X$ e $T_2: X \times Y \rightarrow Y$. Aí, tome $T: X \times Y \rightarrow X \times Y$,*

$$T(x, y) = (T_1(x), T_2(x, y)),$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$. Defina, para cada $x \in X$, $f_x: Y \rightarrow Y$, $f_x(y) = T_2(x, y)$. Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) T_1 possui um ponto fixo p que é um atrator global;
- (b) Para cada $y \in Y$, a função $Z_y: X \rightarrow Y$ definida por $Z_y(x) = T_2(x, y)$ é contínua;

(c) Para todo $x \in X$, existe um real $\lambda_x < 1$ tal que $f_x: Y \rightarrow Y$ é uma λ_x -contração.

Portanto, se $q \in Y$ é um ponto fixo de f_p , o ponto (p, q) é um ponto fixo atrator global para T , com respeito à métrica d definida por

$$d((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

Demonstração. Seja $(x_0, y_0) \in X \times Y$ qualquer. Basta mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0, y_0) = (p, q)$$

em $(X \times Y, d)$. Denote $x_k = T_1^k(x_0)$ para todo k natural. Logo,

$$\begin{aligned} T^2(x_0, y_0) &= T(T(x_0, y_0)) = T(T_1(x_0), T_2(x_0, y_0)) = (T_1^2(x_0), T_2(T_1(x_0), T_2(x_0, y_0))) \\ &= (x_2, T_2(x_1, f_{x_0}(y_0))) = (x_2, f_{x_1}(f_{x_0}(y_0))) = (x_2, (f_{x_1} \circ f_{x_0})(y_0)). \end{aligned}$$

Suponha que para um certo $k \geq 2 \in \mathbb{N}$,

$$T^k(x_0, y_0) = (x_k, (f_{x_{k-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0)).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} T^{k+1}(x_0, y_0) &= T(T^k(x_0, y_0)) = T(x_k, (f_{x_{k-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0)) \\ &= (T_1(x_k), T_2(x_k, (f_{x_{k-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0))) \\ &= (x_{k+1}, f_{x_k}(f_{x_{k-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0)) \\ &= (x_{k+1}, (f_{x_k} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0)), \end{aligned}$$

completando a indução. Por definição,

$$d(T^n(x_0, y_0), (p, q)) = d_X(x_{n+1}, p) + d_Y((f_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0), q).$$

A condição (a) implica que a primeira parcela do lado direito converge a 0. Quanto à segunda, segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} d_Y((f_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0), q) &\leq \\ &\leq d_Y((f_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0), (f_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(q)) + d_Y((f_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(q), q). \end{aligned}$$

Usando a condição (c), defina $\lambda = \max \{\lambda_{x_k} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} d_Y((f_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0), (f_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(q)) &= \\ &= d_Y(f_{x_{n-1}}((f_{x_{n-2}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0)), f_{x_{n-1}}((f_{x_{n-2}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(q))) \\ &\leq \lambda d_Y((f_{x_{n-2}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(y_0), (f_{x_{n-2}} \circ \cdots \circ f_{x_0})(q)). \end{aligned}$$

Iterativamente,

$$d_Y((f_{x_{n-1}} \circ \dots \circ f_{x_0})(y_0), (f_{x_{n-1}} \circ \dots \circ f_{x_0})(q)) \leq \lambda^n d_Y(y_0, q).$$

Naturalmente, a expressão à direita converge a 0. Resta mostrar que a outra parcela, $d_Y((f_{x_{n-1}} \circ \dots \circ f_{x_0})(q), q)$, também converge a 0. Para tal, denote $q_{n,0} = q$ e, para todo $1 \leq k \leq n$,

$$q_{n,k} = (f_{x_{n-1}} \circ \dots \circ f_{x_{n-k}})(q).$$

Assim, basta provar que $d_Y(q_{n,n}, q_{n,0})$ converge a zero. Aí, aplique a desigualdade triangular:

$$d_Y(q_{n,n}, q_{n,0}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d_Y(q_{n,i+1}, q_{n,i}).$$

Repare que, para cada $0 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{aligned} d_Y(q_{n,i+1}, q_{n,i}) &= d_Y((f_{x_{n-1}} \circ \dots \circ f_{x_{n-i}})(f_{x_{n-i-1}}(q)), (f_{x_{n-1}} \circ \dots \circ f_{x_{n-i}})(q)) \\ &\leq \lambda^i d_Y(f_{x_{n-i-1}}(q), q). \end{aligned}$$

Chame, para todo $l \in \mathbb{N}$, $c_l = d_Y(f_{x_{l-1}}(q), q) = d_Y(T_2(x_{l-1}, q), q) = d_Y(Z_q(x_{l-1}), q) = d_Y(Z_q(T_1^{l-1}(x_0)), q)$. De acordo com a condição (b), Z_q é contínua, o que implica que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} T_1^{l-1}(x_0) = p \Rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} Z_q(T_1^{l-1}(x_0)) = Z_q(p) = T_2(p, q) = f_p(q) = q.$$

Mas aí, segundo o **Lema 1.25**, $d_Y(Z_q(T_1^{l-1}(x_0)), q)$ converge para $d_Y(q, q) = 0$, isto é, $\lim_{l \rightarrow \infty} c_l = 0$. Assim,

$$d_Y(q_{n,n}, q_{n,0}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-i} \lambda^i.$$

Segundo o **Lema 1.24**, a expressão à direita converge para 0, de forma que a parcela à esquerda também converge para 0. Assim, (p, q) é atrator global de T ; falta mostrar que é ponto fixo:

$$T(p, q) = (T_1(p), T_2(p, q)) = (p, f_p(q)) = (p, q).$$

Isso conclui a demonstração. □

Teorema 1.27. *Seja $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial C^1 e $x_0 \in \Omega$. Existem reais positivos α e β e uma única função C^1*

$$\Psi: I \times B \rightarrow \Omega,$$

em que

$$I = (-\alpha, \alpha) \quad e \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \beta\}$$

tais que

$$(a) \Psi(0, x) = x;$$

$$(b) \partial_t \Psi(t, x) = F(\Psi(t, x)).$$

A função Ψ também satisfaz a equação

$$\partial_t D_x \Psi(t, x) = DF(\Psi(t, x)) \cdot D_x \Psi(t, x), \quad \forall (t, x) \in I \times B.$$

Demonstração. Como Ω é aberto, existe $c > 0$ satisfazendo $\overline{B_c(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq c\} \subset \Omega$. Visto que F é de classe C^1 , F e DF são funções contínuas. Assim, é possível definir

$$m = \sup \left\{ \|F(x)\| : x \in \overline{B_c(x_0)} \right\}, \quad l = \sup \left\{ \|DF(x)\| : x \in \overline{B_c(x_0)} \right\}.$$

Escolha reais positivos α e β satisfazendo

$$\alpha l < 1 \quad \text{e} \quad \alpha m + \beta < c.$$

Naturalmente, tal escolha é possível, por exemplo: tome $\alpha < \min\{1/l, c/m\}$ e aí $\alpha m < c$, de forma que basta escolher $\beta < c - \alpha m$. Seja $X = C(I \times B, \overline{B_c(x_0)})$, o conjunto das funções contínuas de domínio $I \times B$ e imagem $\overline{B_c(x_0)}$, e observe que (X, d_X) é um espaço métrico completo se $d_X : X \times X \rightarrow [0, \infty)$,

$$d_X(g, h) = \sup \{ \|g(t, x) - h(t, x)\| : (t, x) \in I \times B \} \quad \forall g, h \in X;$$

esta afirmação é demonstrada seguindo raciocínio análogo ao empregado no **Teorema 1.17** e no **Teorema 1.21**. Seja $Y = C_b(I \times B, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, o conjunto das funções contínuas limitadas de domínio $I \times B$ e imagem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sendo este o conjunto dos operadores lineares em \mathbb{R}^n . (Y, d_Y) é um espaço métrico completo se $d_Y : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$,

$$d_Y(A, B) = \sup \{ \|A(t, x) - B(t, x)\| : (t, x) \in I \times B \} \quad \forall A, B \in Y,$$

em que $\|A(t, x)\| = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} \|A(t, x)s\|/\|s\|$, a norma usual para operadores lineares que satisfaz a conveniente propriedade $\|A(t, x)B(t, x)\| \leq \|A(t, x)\| \|B(t, x)\|$.

(Mais uma vez, a demonstração é análoga às dos **Teorema 1.17** e **Teorema 1.21**). Construindo a transformação T para fazer uso do teorema anterior, defina $T_1 : X \rightarrow X$,

$$T_1(g)(t, x) = x + \int_0^t F(g(s, x)) ds.$$

De fato, a continuidade de $T_1(g)$ segue da continuidade de F e de g , além de que, para todo $(t, x) \in I \times B$,

$$\|T_1(t, x) - x_0\| \leq \|x - x_0\| + \left\| \int_0^t F(g(s, x)) ds \right\| < c + \left| \int_0^t \|F(g(s, x))\| ds \right|$$

$$< c + \alpha m < \beta,$$

ou seja, $T_1(g) \in X$ para todo $g \in X$. Além disso,

$$\begin{aligned} d_X(T_1(g), T_1(h)) &= \sup \{ \|T_1(g)(t, x) - T_1(h)(t, x)\| : (t, x) \in I \times B \} \\ &= \sup \left\{ \left\| \int_0^t F(g(s, x)) - F(h(s, x)) ds \right\| : (t, x) \in I \times B \right\}. \end{aligned}$$

Note que, para todo $(t, x) \in I \times B$,

$$\left\| \int_0^t F(g(s, x)) - F(h(s, x)) ds \right\| \leq \left| \int_0^t \|F(g(s, x)) - F(h(s, x))\| ds \right|.$$

Como $\|DF(x)\|$ é limitada, vale a desigualdade do valor médio e

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \|F(g(s, x)) - F(h(s, x))\| ds \right| &\leq \left| \int_0^t l \|g(s, x) - h(s, x)\| ds \right| \leq \left| \int_0^t l d_X(g, h) ds \right| \\ &\leq l |t| d_X(g, h) \leq l \alpha d_X(g, h) = \lambda d_X(g, h), \end{aligned}$$

em que $\lambda < 1$: T_1 é uma λ -contração. Todas as hipóteses do **Lema 1.19** estão satisfeitas, de forma que T_1 possui um ponto fixo atrator global Ψ . Aí,

$$\Psi(t, x) = T_1(\Psi)(t, x) = x + \int_0^t F(\Psi(s, x)) ds.$$

Fazendo $t = 0$ e derivando de ambos lados em função do tempo, as condições (a) e (b) são satisfeitas. Agora construa a função $T_2: X \times Y \rightarrow Y$,

$$T_2(g, A)(t, x) = I + \int_0^t DF(g(s, x))A(s, x) ds.$$

Note que

$$\begin{aligned} \|T_2(g, A)(t, x)\| &\leq \|I\| + \left\| \int_0^t DF(g(s, x))A(s, x) ds \right\| \\ &\leq 1 + \left| \int_0^t \|DF(g(s, x))A(s, x)\| ds \right| \\ &\leq 1 + \left| \int_0^t \|DF(g(s, x))\| \|A(s, x)\| ds \right| \\ &\leq 1 + \alpha k, \end{aligned}$$

em que k é limite para $\|A(s, x)\|$. Isso significa que $T_2(g, A)$ é limitado. A continuidade também segue naturalmente, de forma que $T_2(g, A)$ é propriamente um elemento de

Y . Seja $Z_A: X \rightarrow Y$, $Z_A(g) = T_2(g, A)$. É preciso mostrar que esta função é contínua para satisfazer a segunda condição do teorema acima. Tome $\varepsilon > 0$ qualquer e repare que, dados $g, h \in X$ e $A \in Y$,

$$\begin{aligned} d_Y(Z_A(g), Z_A(h)) &= d_Y(T_2(g, A), T_2(h, A)) \\ &= \sup \left\{ \left\| \int_0^t [DF(g(s, x)) - DF(h(s, x))]A(s, x) ds \right\| : (t, x) \in I \times B \right\}. \end{aligned}$$

Para todo $(t, x) \in I \times B$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t [DF(g(s, x)) - DF(h(s, x))]A(s, x) ds \right\| &\leq \\ &\leq \left| \int_0^t \|DF(g(s, x)) - DF(h(s, x))\| \|A(s, x)\| ds \right| \\ &\leq \left| k \int_0^t \|DF(g(s, x)) - DF(h(s, x))\| ds \right|. \end{aligned}$$

Como F é de classe C^1 , DF é uniformemente contínua em $\overline{B_c(x_0)}$, isto é, para todo $\varepsilon' > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$\|g(s, x) - h(s, x)\| < \delta' \Rightarrow \|DF(g(s, x)) - DF(h(s, x))\| < \varepsilon' \quad \forall (s, x) \in I \times B.$$

Assim, tome $\varepsilon' = \varepsilon/k\alpha$, de forma que existe um $\delta > 0$ satisfazendo a expressão acima. Se $d_X(g, h) < \delta$, então $\|g(s, x) - h(s, x)\| < \delta \Rightarrow \|DF(g(s, x)) - DF(h(s, x))\| < \varepsilon/k\alpha$ para todo $(s, x) \in I \times B$. Assim,

$$\left| k \int_0^t \|DF(g(s, x)) - DF(h(s, x))\| ds \right| < k\alpha \cdot \frac{\varepsilon}{k\alpha} = \varepsilon.$$

Portanto, $d_Y(Z_A(g), Z_A(h)) < \varepsilon$, o que implica que Z_A é contínua, como desejado. Resta mostrar que T_2 satisfaz a condição (c). Dados $g \in X$ e $A \in Y$, seja $f_g: Y \rightarrow Y$, $f_g(A) = T_2(g, A)$ para todo $A \in Y$. É preciso mostrar que existe real positivo $\lambda_g < 1$ tal que f_g é uma λ_g -contração. De fato, veja que

$$\begin{aligned} d_Y(f_g(A), f_g(B)) &= d_Y(T_2(g, A), T_2(g, B)) \\ &= \sup \left\{ \left\| \int_0^t DF(g(s, x))[A(s, x) - B(s, x)] ds \right\| : (t, x) \in I \times B \right\} \end{aligned}$$

Mais uma vez desenvolva: para todo $(t, x) \in I \times B$,

$$\left\| \int_0^t DF(g(s, x))[A(s, x) - B(s, x)] ds \right\| \leq \left| \int_0^t \|DF(g(s, x))\| \|A(s, x) - B(s, x)\| ds \right|$$

$$\leq \left| \int_0^t l d_Y(A, B) ds \right| \leq l \alpha d_Y(A, B).$$

De fato, $\lambda_g = l\alpha < 1$ e a conclusão segue. Por conseguinte, é verdadeiro o **Teorema 1.26** e se L é o ponto fixo de f_Ψ (ponto fixo que existe segundo o **Lema 1.19**, pois Y é espaço métrico completo), então (Ψ, L) é um ponto fixo atrator global de T , em que $T: X \times Y \rightarrow X \times Y$,

$$T(x, y) = (T_1(x), T_2(x, y)) \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Comece a iteração de tal função em (g_0, A_0) , em que $g_0(t, x) = x$ e $A_0(t, x) = I$ para todo $(t, x) \in I \times B$. Aí, se $T^n(g_0, A_0) = (g_n, A_n)$, tem-se que

$$g_{n+1}(t, x) = T_1(g_n)(t, x) = x + \int_0^t F(g_n(s, x)) ds;$$

$$A_{n+1}(t, x) = T_2(g_n, A_n)(t, x) = I + \int_0^t DF(g_n(s, x))A_n(s, x) ds.$$

Do **Teorema 1.26**, (g_n) converge para Ψ e (A_n) converge para L . Naturalmente, a função g_0 é de classe C^1 , e $D_x g_0 = I = A_0$. Usando que F é C^1 , é fácil verificar a partir da primeira fórmula acima que g_{n+1} é C^1 se g_n for C^1 . Isso implica, por indução, que todos os elementos da sequência (g_n) são C^1 . Como a convergência de g_n a Ψ é uniforme (recíproca do **Lema 1.16**, facilmente demonstrável), segue a partir de argumento análogo ao utilizado no próprio **Lema 1.16** que Ψ é C^1 . Indutivamente, suponha que $A_k = D_x g_k$. Aí,

$$D_x g_{k+1}(t, x) = I + D_x \int_0^t F(g_k(s, x)) ds.$$

Como $F(g_k(s, x))$ é de classe C^1 , vale a **Regra de Leibniz** e tal expressão é igual a

$$\begin{aligned} I + \int_0^t D_x [F(g_k(s, x))] ds &= I + \int_0^t DF(g_k(s, x)) D_x g_k(s, x) ds \\ &= I + \int_0^t DF(g_k(s, x)) A_k(s, x) ds = A_{k+1}(t, x), \end{aligned}$$

de forma que $A_n = D_x g_n$ para todo natural n . Também segue da convergência uniforme de (g_n) para Ψ que

$$D_x \Psi = D_x \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} D_x g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = L.$$

Sendo L ponto fixo de f_Ψ ,

$$D_x \Psi(t, x) = L(t, x) = f_\Psi(L)(t, x) = T_2(\Psi, L)(t, x) = I + \int_0^t DF(\Psi(s, x)) D_x \Psi(s, x) ds.$$

Portanto,

$$\partial_t D_x \Psi(t, x) = DF(\Psi(t, x)) D_x \Psi(t, x),$$

completando a demonstração. \square

Teorema 1.28 (Consequência direta do resultado anterior, não está demonstrado aqui. É possível encontrar demonstração no primeiro capítulo de [2]). *Se a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ a função $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$, em que $\varphi(\cdot, x_0)$ é a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é de classe C^1 em uma vizinhança de (x_0, y_0)

Teorema 1.29 (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Dado um ponto $p \in D$ com $f(p) \neq 0$, existe uma mudança de coordenadas $y = g(x)$ numa vizinhança de p transformando a equação $x' = f(x)$ na equação $y' = v$ para algum $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Demonstração. Empregando a notação do **Exemplo 1.23**, seja $\varphi_t(x_0)$ a solução da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x_0$ em seu intervalo maximal. Como $f(p) \neq 0$, alguma de suas componentes é não nula. Suponha, sem perda de generalidade, que esta seja a primeira, e defina novas coordenadas $y = (y_1, \dots, y_n)$ por

$$x = F(y) = \varphi_{y_1}(p + \bar{y}),$$

em que $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $\bar{y} = (0, y_2, \dots, y_n)$. Esta expressão de fato define uma função C^1 y implicitamente em alguma vizinhança de 0 em razão do **Teorema da Função Implícita** aplicado na função $F(y) - x$.

As condições para a validade deste teorema (no caso em que é desejado que a função ao final seja de classe C^1 , como do resultado enunciado) são: F é de classe C^1 em uma vizinhança de 0 e a matriz jacobiana de F calculada em 0 é invertível.

Para demonstrar a primeira afirmação, basta usar o **Teorema 1.28** acima. Quanto à segunda parte, observe que

$$\left. \frac{\partial}{\partial y_1} F(y) \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial}{\partial y_1} \varphi_{y_1}(p + \bar{y}) \right|_{y=0} = f(\varphi_{y_1}(p + \bar{y})) \Big|_{y=0} = f(\varphi_0(p)) = f(p).$$

Para $2 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial y_i} F(y) \right|_{y=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_{y_1}(p_1, p_2 + y_2, \dots, p_n + y_n) \right|_{y=0} \\ &= \lim_{y_i \rightarrow 0} \frac{\varphi_0(p_1, \dots, p_i + y_i, \dots, p_n) - \varphi_0(p_1, \dots, p_n)}{y_i - 0} \end{aligned}$$

$$= \lim_{y_i \rightarrow 0} \frac{(p_1, \dots, p_i + y_i, \dots, p_n) - (p_1, \dots, p_n)}{y_i} = e_i.$$

Dessa forma, a matriz jacobiana de F calculada em 0 é $d_0F = [f(p) \ e_2 \ \dots \ e_n]$. Como a primeira entrada de $f(p)$ é não nula, esta é uma matriz triangular superior cuja diagonal é não nula. Isso implica que seu determinante é diferente de zero e a matriz é invertível, como desejado.

Seja $p + q = (p_1, \dots, p_n) + (0, q_2, \dots, q_n)$ um ponto no domínio do fluxo associado à equação $x' = f(x)$. Seja $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ a única solução dessa equação que satisfaz a condição inicial $x(0) = p + q$. Aí,

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \varphi_t(p + q).$$

Seja $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ esta solução nas novas coordenadas, isto é,

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)) = F(y(t)).$$

Dessa forma,

$$\varphi_t(p + q) = F(y(t)) = \varphi_{y_1(t)}(p_1, p_2 + y_2(t), \dots, p_n + y_n(t)).$$

Como F é invertível no domínio de definição de y , F é injetora e aí a expressão acima implica que

$$y(t) = (t, q_2, \dots, q_n),$$

de forma que $y'(t) = (1, 0, \dots, 0)$, como se queria demonstrar. \square

1.5 Teorema de Poincaré-Bendixson

Os exercícios desta seção foram extraídos de [13] e do Capítulo 3 de [11].

1.5.1 Exercícios

Exercício 1.30. *Verifique que C ([13], p. 1) é vazio ou um subgrupo fechado de \mathbb{R} , isto é,*

(a) *Se $c, d \in C$ então $c - d \in C$;*

(b) *Se, dada uma sequência (c_n) em C , $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, então $c \in C$.*

Solução. Suponha que $c, d \in C$ (isto é, C não é vazio). Então, $\Psi(t + c, x) = \Psi(t, x) = \Psi(t + d, x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\Psi(t + (c - d), x) = \Psi((t - d) + c, x) = \Psi(t - d, x) = \Psi((t - d) + d, x) = \Psi(t, x)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $c - d \in C$. Além disso, como o fluxo é uma função contínua nesse

contexto, dada uma sequência (c_n) em C que converge para c ,

$$\Psi(t + c, x) = \Psi\left(t + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t + c_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t, x) = \Psi(t, x)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, como desejado. ■

Para o que segue, assumamos que $x \in \Omega$ é tal que $\Psi(t, x)$ está definida para todo $t \geq 0$.

Exercício 1.31. *Mostre que $\omega(x) = \omega(\Psi(t, x))$ para todo $t \in I_x$ ([13], p. 2).*

Solução. Escolha $t \in I_x$ arbitrário e considere $y \in \omega(x)$. Logo, existe uma sequência (t_n) , t_n pertence a I_x para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, que satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t_n, x) = y$. Como (t_n) cresce indefinidamente, existe $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $t_n - t \geq 0$ para todo $n \geq k$. Logo, defina a sequência (T_n) , $T_n = t_{n+k} - t \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implica que $\Psi(T_n, x)$ está definida para toda esta nova sequência e

$$\Psi(T_n, \Psi(t, x)) = \Psi(T_n + t, x) = \Psi(t_{n+k}, x).$$

Dessa forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(T_n, \Psi(t, x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t_n, x) = y$$

e aí $y \in \omega(\Psi(t, x))$. Reciprocamente, se $y \in \omega(\Psi(t, x))$, existe sequência (s_n) , $s_n \in I_{\Psi(t, x)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(s_n, \Psi(t, x)) = y$. Analogamente, existe $l \in \mathbb{N}$ satisfazendo $s_n + t \geq 0$ para todo $n \geq l$. Aí, construa (S_n) , $S_n = s_{n+l} + t \geq 0$ e a boa definição de $\Psi(S_n, x)$ para todo natural n está garantida. Então,

$$\Psi(S_n, x) = \Psi(s_{n+l} + t, x) = \Psi(s_{n+l}, \Psi(t, x)).$$

Por fim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(S_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(s_{n+l}, \Psi(t, x)) = y$$

e $y \in \omega(x)$, completando a prova. ■

Exercício 1.32. *Prove que $\omega(x)$ é fechado.*

Solução. Seja $(y_n)_n$ uma sequência cujos elementos estão em $\omega(x)$ e suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(t_{k,n})_n$ de elementos em I_x que cresce indefinidamente e que satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t_{k,n}, x) = y_k$. Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $N_{k_1}, N_{k_2} \in \mathbb{N}$ tais que $m \geq N_{k_1} \Rightarrow t_{k,m} > k$ e $m \geq N_{k_2} \Rightarrow |\Psi(t_{k,m}, x) - y_k| < 1/k$. Seja $N_k = \max\{N_{k_1}, N_{k_2}\}$. Assim, construa a sequência $(s_n)_n$, $s_n = t_{n, N_n}$. Como $N_n \geq N_{n_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = t_{n, N_n} > n$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$. Além disso, repare que

$$|\Psi(s_n, x) - y| \leq |\Psi(s_n, x) - y_n| + |y_n - y| = |\Psi(t_{n, N_n}, x) - y_n| + |y_n - y|.$$

Como $N_n \geq N_{n_2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|\Psi(t_{n,N_n}, x) - y_n| + |y_n - y| < \frac{1}{n} + |y_n - y|.$$

Escolha qualquer $\varepsilon > 0$. Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon/2$. Também existe natural n_2 tal que $n_2 > 2/\varepsilon$. Portanto, denote $N = \max\{n_1, n_2\}$ e conclua que, se $n \geq N$,

$$|\Psi(s_n, x) - y| < \frac{1}{n} + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e $(\Psi(s_n, x))_n$ converge para y , de forma que $y \in \omega(x)$, completando a demonstração. ■

Exercício 1.33. *Demonstre que $\omega(x)$ é invariante sob o fluxo, isto é, se $y \in \omega(x)$, então $\Psi(t, y) \in \omega(x)$ para todo $t \in I_y$.*

Solução. Suponha que $y \in \omega(x)$. Logo, existe (t_n) em I_x , $t_n \rightarrow \infty$, satisfazendo $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t_n, x) = y$. Então, dado $t \in I_y$, considere $\Psi(t, y)$. Naturalmente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_n + t \geq 0$ para todo $n \geq k$. Assim, defina (s_n) , $s_n = t_{n+k} + t \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É evidente que $s_n \rightarrow \infty$ e, além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(s_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t + t_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t, \Psi(t_n, x)).$$

Como Ψ é contínua, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t, \Psi(t_n, x)) = \Psi\left(t, \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t_n, x)\right) = \Psi(t, y),$$

de forma que $\Psi(t, x) \in \omega(x)$, como desejado. ■

Exercício 1.34. *Acrescentando a hipótese de que $O^+(x)$ está contido num compacto $C \subset \Omega$, mostre que $\omega(x)$ é compacto.*

Solução. Basta mostrar que $\omega(x)$ é limitado. Como $O^+(x)$ é limitado por hipótese, existe $N > 0$ tal que $\|\Psi(t, x)\| \leq N$ para todo $t \geq 0$. Então, para qualquer sequência (t_n) em I_x , $t_n \rightarrow \infty$,

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t_n, x) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi(t_n, x)\| \leq N$$

e $\omega(x)$ é limitado, como desejado. ■

Exercício 1.35. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(r^4 - 3r^2 + 1), \\ \dot{y} &= x + y(r^4 - 3r^2 + 1), \end{aligned}$$

em que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mostre que $\dot{r} < 0$ no círculo $r = 1$ e que $\dot{r} > 0$ no círculo

$r = 2$. Use o **Teorema de Poincaré-Bendixson** e o fato de que o único ponto crítico desse sistema é a origem para mostrar que existe uma órbita periódica na região anelar $A_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 < |\mathbf{x}| < 2\}$. Use ideia semelhante para mostrar que existe uma outra órbita periódica na região $A_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < |\mathbf{x}| < 1\}$.

Solução. Repare que $\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y})/r$.

Caso $r = 1$, $\dot{x} = -y - x$ e $\dot{y} = x - y$. Aí, $\dot{r} = -(x^2 + y^2)/r = -r = -1 < 0$. Caso $r = 2$, $\dot{x} = -y + 5x$ e $\dot{y} = x + 5y$. Então, $\dot{r} = 5(x^2 + y^2)/r = 5r = 10 > 0$.

Considere uma curva integral qualquer Γ cujo valor inicial ($t = 0$) está em A_1 , isto é, $1 < r(0) < 2$. Suponha, por absurdo, que, para algum $t_0 < 0$, $r(t_0) \geq 2$. Como r é contínua, existe $\delta < 0$ tal que $t \in (\delta, 0] \Rightarrow r(t) < 2$. Defina o conjunto $I = \{\delta < 0 : r(t) < 2 \forall t \in (\delta, 0]\}$ e tome $t_1 = \inf I$. Como na demonstração do **Teorema do Valor Intermediário**, é fácil verificar que $r(t_1) = 2$.

Assim, $\dot{r}(t_1) > 0$ e existe uma vizinhança de t_1 na qual r é estritamente crescente; tome $t_2 < 0$ nessa vizinhança tal que $t_1 < t_2$. Naturalmente, $2 = r(t_1) < r(t_2)$. Mas aí, novamente empregando o valor intermediário, existe t_3 satisfazendo $t_1 < t_2 < t_3 < 0$ tal que $r(t_3) = 2$, contradizendo a definição de t_1 : t_3 é cota inferior de I maior que $t_1 = \inf I$. O mesmo argumento vale para mostrar que, para uma trajetória de valor inicial em A_1 , a função r não pode assumir valores menores ou iguais a 1 para valor negativos de t .

Dessa forma, Γ^- está contida em A_1 . Para empregar o **Teorema de Poincaré-Bendixson**, basta considerar o compacto $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |\mathbf{x}| \leq 2\}$. Como não há pontos críticos nessa região, que evidentemente contém $\alpha(\Gamma)$, existe uma órbita periódica em X . Segue imediatamente da contradição desenvolvida no parágrafo anterior que tal órbita está em A_1 .

Quanto à região anelar A_2 , veja que $\dot{r} < 0$ quando $r = 1$, de forma que argumento completamente análogo ao empregado acima também funciona neste caso, estudando a semi-órbita positiva Γ^+ de uma trajetória cujo valor inicial está em A_2 e seu ômega-limite, demonstrando que há uma outra órbita periódica. ■

Exercício 1.36. Use o **Teorema de Poncaré-Bendixson** e o fato de que o sistema planar

$$\dot{x} = x - y - x^3, \quad \dot{y} = x + y - y^3,$$

possui somente um ponto crítico na origem para mostrar que esse sistema possui uma órbita periódica na região anelar $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 < |\mathbf{x}| < \sqrt{2}\}$.

Solução. Usando que $\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y})/r$:

$$x\dot{x} = x^2 - xy - x^4, \quad y\dot{y} = xy + y^2 - y^4.$$

Logo, $x\dot{x} + y\dot{y} = x^2 + y^2 - (x^4 + y^4) = r^2 - r^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$, de forma que

$$\dot{r} = r - r^3(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = r - r^3(1^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta) = r - r^3 \left(1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2}\right).$$

Como $0 \leq \sin^2 2\theta \leq 1$, tem-se que $r(1 - r^2) \leq \dot{r} \leq r(1 - r^2/2)$. Dado $0 < \varepsilon < 1$, faça $r = \sqrt{2} + \varepsilon$:

$$\dot{r} \leq (\sqrt{2} + \varepsilon) \left(1 - \frac{(\sqrt{2} + \varepsilon)^2}{2}\right) = -(\sqrt{2} + \varepsilon) \left(\sqrt{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) < 0.$$

Por outro lado, se $r = 1 - \varepsilon$,

$$\dot{r} \geq (1 + \varepsilon) (1 - (1 - \varepsilon)^2) = \varepsilon(1 + \varepsilon)(2 - \varepsilon) > 0.$$

Portanto, dada uma trajetória qualquer Γ cujo valor inicial está em A , fica evidente, pelo mesmo argumento utilizado no exercício anterior, que Γ^+ está contida em $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 - \varepsilon < |\mathbf{x}| < \sqrt{2} + \varepsilon\}$ para todo ε entre 0 e 1. Isso implica que Γ^+ está contida em $A' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |\mathbf{x}| \leq \sqrt{2}\}$; caso contrário, isto é, caso exista um ponto da trajetória tal que $r(t) < 1$ ou $r(t) > \sqrt{2}$, basta tomar $\varepsilon < 1 - r(t)$ para a primeira opção e $\varepsilon < r(t) - \sqrt{2}$ para a segunda opção para obter uma contradição.

Em $r = 1$, os únicos pontos nos quais $\dot{r} = 0$ são aqueles em que $\sin 2\theta = 0$: $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$; para os outros valores de θ , $\dot{r} > 0$. Logo, se a trajetória não está contida em A , deve necessariamente tocar a circunferência $r = 1$ em algum desses pontos (caso contrário, o argumento do exercício anterior é válido e Γ^+ deve estar restrita a A). Terminar* ■

2 Dinâmica Discreta

2.1 Conjunto de Cantor

2.1.1 Exercícios

O exercício abaixo foi extraído de [15].

Exercício 2.1 (Exercício 6.1 de [15]). *Sejam $G_0(x) = x/3$ e $G_2(x) = x/3 + 2/3$, para todo $x \in [0, 1] = \mathcal{K}_0$. Defina indutivamente \mathcal{K}_n da seguinte forma:*

$$\mathcal{K}_{n+1} = G_0(\mathcal{K}_n) \cup G_2(\mathcal{K}_n).$$

O conjunto de cantor \mathcal{K} é o conjunto dos números reais que pertencem a \mathcal{K}_n para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n.$$

Prove que \mathcal{K} é o único conjunto limitado e fechado de \mathbb{R} que satisfaz

$$\mathcal{K} = G_0(\mathcal{K}) \cup G_2(\mathcal{K}).$$

Solução. Suponha que K satisfaz as hipóteses acima. Comece observando que $K \subseteq [0, 1]$: por contradição suponha que existe $k_0 \in K$ tal que $k_0 > 1$ ou $k_0 < 0$.

Quanto ao primeiro caso, existe $k_1 \in K$ tal que $k_1/3 = k_0$ ou $k_1/3 + 2/3 = k_0$. Logo, $k_1 = 3k_0 > k_0 > 1$ ou $k_1 = 3k_0 - 2 > k_0 + 2 - 2 = k_0 > 1$. De qualquer forma, $k_1 > k_0 > 1$. Retornando à definição, existe $k_2 \in K$ tal que $k_2/3 = k_1$ ou $k_2/3 + 2/3 = k_1$. Através do mesmo argumento, vê-se que $k_2 > k_1 > 1$. Indutivamente, constrói-se a sequência (k_n) em K , em que $k_{n+1} > k_n > 1$ para todo n natural. Como K é limitado, (k_n) também o é, de forma que (k_n) converge. Sendo K fechado, (k_n) converge para um certo $k \in K$ maior do que 1.

Veja que, para todo natural n , $k_{n+1} \geq 3k_n - 2$, de forma que

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} k_{n+1} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 3k_n - 2 = 3k - 2 \Rightarrow 2(k - 1) \leq 0 \Rightarrow k \leq 1,$$

um absurdo. O raciocínio é análogo quanto ao segundo caso. Se $k_0 < 0$, existe $k_1 \in K$ satisfazendo $k_1/3 = k_0$ ou $k_1/3 + 2/3 = k_0$. Logo, $k_1 = 3k_0 < k_0 < 0$ ou $k_1 = 3k_0 - 2 < k_0 - 2 < k_0 < 0$. De qualquer forma, $k_1 < k_0 < 0$. Retornando à definição, existe $k_2 \in K$ tal que $k_2/3 = k_1$ ou $k_2/3 + 2/3 = k_1$. Através do mesmo argumento, vê-se que $k_2 < k_1 < 0$. Mais uma vez, se constrói indutivamente a sequência (k_n) que satisfaz $k_{n+1} < k_n < 0$ para todo n natural, e sendo K um compacto, (k_n) converge para $k \in K$ menor do que 0.

Perceba que, para todo natural n , $k_{n+1} \leq 3k_n$, o que implica que

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} k_{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 3k_n = 3k \Rightarrow 2k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0,$$

também uma contradição, como desejado. Aí, como $K \subseteq \mathcal{K}_0$, segue que $G_0(K) \subseteq G_0(\mathcal{K}_0)$ e $G_2(K) \subseteq G_2(\mathcal{K}_0)$, e então

$$K = G_0(K) \cup G_2(K) \subseteq G_0(\mathcal{K}_0) \cup G_2(\mathcal{K}_0) = \mathcal{K}_1.$$

Indutivamente, $K \subseteq \mathcal{K}_n$ para todo n natural, de forma que $K \subseteq \mathcal{K}$. Para a outra inclusão, repare que, para todo n natural, \mathcal{K}_n é a união de 2^n subintervalos de $[0, 1]$ de comprimento $1/3^n$. Denote $\mathcal{K}_n = I_1 \cup \dots \cup I_{2^n}$. Naturalmente,

$$\mathcal{K}_{n+1} = G_0(I_1) \cup G_2(I_1) \cup \dots \cup G_0(I_{2^n}) \cup G_2(I_{2^n}).$$

Suponha que $x_1 \in I_1, \dots, x_{2^n} \in I_{2^n}$. Dessa forma, segue que $G_0(x_1) \in G_0(I_1), G_2(x_1) \in G_2(I_1), \dots, G_0(x_{2^n}) \in G_0(I_{2^n}), G_2(x_{2^n}) \in G_2(I_{2^n})$. Assim, dado $x \in K$ qualquer e iterando as funções G_0 e G_2 sucessivamente (continuando dentro de K , por hipótese), é possível obter um ponto de K em cada intervalo que compõe \mathcal{K}_n para todo n natural:

Dado $x_0 \in K$, vale que $x_0 \in [0, 1] = \mathcal{K}_0$. Se para $n \geq 1$ existem $x_i \in K$ tais que $x_i \in I_i$ como acima, para todo $1 \leq i \leq 2^n$, então $G_0(x_i) \in G_0(I_i)$ e $G_2(x_i) \in G_2(I_i)$ para todo $1 \leq i \leq 2^n$, o que justifica a afirmação acima por indução.

Portanto, se $k \in \mathcal{K}$, então $k \in \mathcal{K}_n$ para todo n natural. Aí, basta construir a sequência (k_n) , em que cada $k_n \in K$ está no mesmo subintervalo de \mathcal{K}_n que k . Como $|k_n - k| \leq 1/3^n$, é evidente que (k_n) converge para k e, sendo K fechado, $k \in K$, o que implica que $\mathcal{K} \subseteq K$, completando a demonstração. ■

2.2 A Família Quadrática

2.2.1 Exercícios

Os exercícios abaixo foram extraídos do Capítulo 7 de [4].

Exercício 2.2. *Encontre os números racionais cuja expansão ternária é*

(a) $0,022022\overline{022}$;

(b) $0,0101101\overline{101}$.

Solução.

$$(a) \ 0.022022\overline{022} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{3n+2}} + \frac{2}{3^{3n+3}} = \frac{2/9}{1-1/27} + \frac{2/27}{1-1/27} = \frac{3}{13} + \frac{1}{13} = \frac{4}{13}.$$

$$(b) \ 0.0101101\overline{101} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{3n+2}} + \frac{1}{3^{3n+4}} = \frac{1/9}{1-1/27} + \frac{1/81}{1-1/27} = \frac{9}{78} + \frac{1}{78} = \frac{5}{39}.$$

Exercício 2.3. *Seja $Q_c(x) = x^2 + c$ com $c < -2$. Sejam I e A_1 como definidos nesse capítulo. Prove que se $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$, então $|Q'_c(x)| > 1$ para todo $x \in I \setminus A_1$.*

Solução. Veja que $I - A_1 = \{x \in I : Q_c(x) \geq -p_+\}$. Como $|Q'_c(x)| = 2|x|$, $|Q'_c(x)| > 1$ se $|x| > 1/2$. Basta, portanto, considerar os valores de c para os quais $Q_c(1/2) > -p_+$, pois, caso contrário, $I - A_1 \subseteq [-p_+, -1/2) \cup (1/2, p_+]$ e não há mais nada a fazer. Logo,

$$\frac{1}{4} + c > -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c}) \Leftrightarrow -3 - 4c < 2\sqrt{1 - 4c}$$

Como $c < -2$, segue que $-3 - 4c > -3 + 8 > 0$, de forma que

$$(3 + 4c)^2 < 4(1 - 4c) \Leftrightarrow 9 + 24c + 16c^2 < 4 - 16c \Leftrightarrow 16c^2 + 40c + 5 < 0.$$

As raízes de tal polinômio são

$$c = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 16 \cdot 5}}{32} = \frac{-40 \pm 16\sqrt{5}}{32} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{4}.$$

Assim,

$$-\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4} < c < \frac{5 + 2\sqrt{5}}{4}.$$

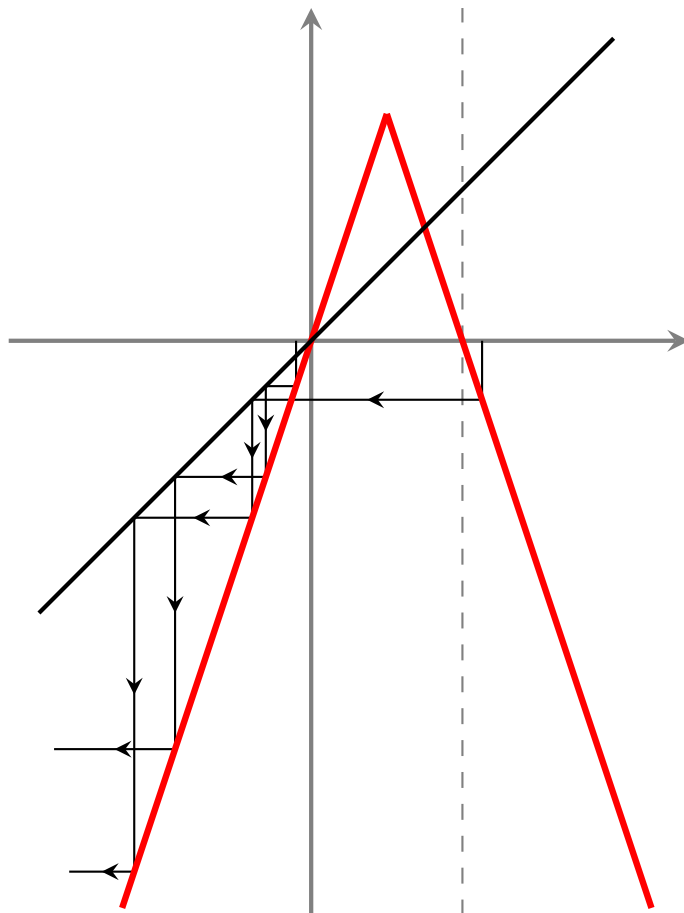
Como, por hipótese, $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$, segue que $Q_c(1/2) \leq -p_+$ para os valores de c considerados e a proposição está demonstrada. ■

Exercício 2.4. *Esboce o gráfico da função*

$$T(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 1/2, \\ 3 - 3x & \text{se } x > 1/2, \end{cases}$$

e mostre através da análise gráfica que, se $x > 1$ ou $x < 0$, então $T^n(x) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Solução.



Na figura acima, foi feita a análise gráfica de órbitas com valores iniciais $x > 1$ e $x < 0$. É fácil verificar que ambas as órbitas divergem para $-\infty$. ■

Exercício 2.5. *Encontre os pontos fixos de T . Qual a expansão ternária desses pontos?*

Solução. Basta resolver $T(x) = x$: se $x \leq 1/2$, então $3x = x \Leftrightarrow x = 0$. Se $x > 1/2$, então $3 - 3x = x \Leftrightarrow x = 3/4$. A expansão ternária de 0 é 0,000...; a expansão ternária de $3/4$ começa com 0,2020..., analisando os intervalos nos quais $3/4$ está contido. De fato,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{2n+1}} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - 1/9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4}.$$

Logo, $3/4 = 0,2020\overline{20}$. ■

Exercício 2.6. *Mostre que $3/13$ e $3/28$ estão em 3-ciclos com relação à iteração de T .*

Solução. Como $3/13 \leq 1/2$, $T(3/13) = 9/13$. Sendo $9/13 > 1/2$, $T^2(3/13) = 3 - 27/13 = 12/13$. Por fim, como $12/13 > 1/2$, $T^3(3/13) = 3 - 36/13 = 3/13$.

Valendo $3/28 \leq 1/2$, $T(3/28) = 9/28$. Já que $9/28 \leq 1/2$, $T^2(3/28) = 27/28$. Aí, $27/28 > 1/2$ e $T^3(3/28) = 3 - 81/28 = 3/28$. ■

Exercício 2.7. Mostre que se $x \in (1/3, 2/3)$, então $T^n(x) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Solução. Repare que

$$\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < 3x \leq \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 < 3 - 3x < \frac{3}{2}.$$

Em ambos os casos, $T(x) > 1$, o que implica que $T^n(T(x)) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ segundo o **Exercício 2.4**. Mas aí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(T(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = -\infty. \quad \blacksquare$$

Exercício 2.8. Mostre que se $x \in (1/9, 2/9)$ ou $x \in (7/9, 8/9)$, então $T^n(x) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Solução. Veja que

$$\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} < 3x < \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{7}{9} < x < \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} < 3 - 3x < \frac{2}{3}.$$

Em ambos os casos, $T(x) \in (1/3, 2/3)$, o que implica que, usando o exercício anterior, $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(T(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = -\infty$. ■

Exercício 2.9. Seja $\Gamma = \{x \in [0, 1] : T^n(x) \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}\}$. Prove que $\Gamma = \mathcal{K}$.

Solução. Usando a definição geométrica do **Exercício 2.1** acima, comece supondo que $x \in \mathcal{K}$. Aí, $x \in \mathcal{K}_{n+1}$ para todo n natural. Dessa forma, existe $x_n \in \mathcal{K}_n$ tal que $G_0(x_n) = x$ ou $G_2(x_n) = x$, isto é, $x_n/3 = x$ ou $x_n/3 + 2/3 = x$. Quanto ao primeiro caso, $T(x) = 3x = x_n$; quanto ao segundo, $T(x) = 3 - 3x = 1 - x_n$. De qualquer forma, $T(x) \in \mathcal{K}_n$:

Se $T(x) = x_n$, a conclusão é imediata. Se $T(x) = 1 - x_n$, então basta empregar a notação ternária: se $x_n \in \mathcal{K}_n$, então $x_n = 0, s_1 s_2 \dots s_n \dots$, em que $s_i \in \{0, 1, 2\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $s_1, s_2, \dots, s_n \in \{0, 2\}$. Como $1 = 0, 222 \dots$, é fácil ver que $1 - x_n = 0, r_1 r_2 \dots r_n \dots$ é tal que $r_i \in \{0, 1, 2\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $r_1, r_2, \dots, r_n \in \{0, 2\}$, de forma que $1 - x_n \in \mathcal{K}_n$, como desejado.

Como a escolha de n é arbitrária, esta argumentação permite concluir que $x \in \mathcal{K} \Rightarrow T(x) \in \mathcal{K}$. Portanto, segue indutivamente que $T^n(x) \in \mathcal{K} \subset [0, 1]$ para todo natural n , logo, $\mathcal{K} \subseteq \Gamma$. Agora tome $x \in \Gamma$. Por definição, $T^n(x) \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$. Isso implica que $T^n(x) = 3T^{n-1}(x)$ ou $T^n(x) = 3 - 3T^{n-1}(x)$, isto é, $T^{n-1}(x) = T^n(x)/3$ ou $T^{n-1}(x) = 1 - T^n(x)/3$. Estando $T^n(x)$

em $[0, 1]$, vale que $T^{n-1}(x) \in \mathcal{K}_1$. Suponha que, para $1 \leq k \leq n-1$, $T^{n-k}(x) \in \mathcal{K}_k$. Empregando o mesmo argumento, tem-se

$$T^{n-k-1}(x) = \frac{T^{n-k}(x)}{3} \quad \text{ou} \quad T^{n-k-1}(x) = 1 - \frac{T^{n-k}(x)}{3}.$$

Evidentemente, $T^{n-k}(x)/3 \in G_0(\mathcal{K}_k) \subset \mathcal{K}_{k+1} \Rightarrow 1 - T^{n-k}(x)/3 \in \mathcal{K}_{k+1}$, o que implica que $T^{n-(k+1)}(x) \in \mathcal{K}_{k+1}$. Iterativamente, $T^{n-i}(x) \in \mathcal{K}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Em particular, $T^0(x) = x \in \mathcal{K}_n$.

Sendo a escolha de n arbitrária, se infere que $x \in \mathcal{K}$ e $\mathcal{K} = \Gamma$, como se queria demonstrar. ■

Exercício 2.10. *Suponha que $x \in \Gamma$ possui expansão ternária $0.a_1a_2a_3\dots$. Qual é a expansão ternária de $T(x)$?*

Solução. Seja $x = 0.a_1a_2a_3\dots$, isto é, $a_n \in \{0, 2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

Se $a_1 = 0$, então $x \leq 1/2$, de forma que

$$T(x) = 3x = 3 \left(\frac{0}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^n}.$$

Logo, $T(x) = 0.a_2a_3a_4\dots$, isto é, basta deslocar a sequência de algarismos à esquerda, eliminando a_1 . Se $a_1 = 2$, então $x > 1/2$, o que implica que

$$T(x) = 3 - 3x = \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \right) - 3 \left(\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - a_{n+1}}{3^n}.$$

Logo, $T(x) = 0.(2-a_2)(2-a_3)(2-a_4)\dots$, isto é, basta trocar cada 0 por 2 e vice-versa e deslocar a sequência de algarismos à esquerda, eliminando a_1 . ■

Exercício 2.11. *Prove que $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ possui pelo menos 2^n pontos periódicos de período n no intervalo $[0, 1]$ (não necessariamente de menor período n) para $\lambda = 4$.*

Solução. Repare que cada ponto de $I = [0, 1)$ possui duas pré-imagens em $[0, 1)$: dado $y \in [0, 1)$, resolva $4x(1-x) = y$:

$$4x(1-x) = y \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-y}}{2}.$$

Como $0 \leq y < 1$, tais expressões são números reais distintos, de forma que $|F_4^{-1}(y)| = 2$. Agora chame $g_0(x) = 1/2 - \sqrt{1-x}/2$ e $g_1(x) = 1/2 + \sqrt{1-x}/2$, com o domínio igual

a $[0, 1]$. Evidentemente, $F_4(g_0(x)) = F_4(g_1(x)) = x$. Ambas as funções g_0 e g_1 são injetoras.

Para cada sequência finita de n termos $s_n = (s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,n})$ de 0s e 1s, isto é, $s_{n,i} \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq n$, defina

$$g_{s_n} = g_{s_{n,1}} \circ g_{s_{n,2}} \circ \dots \circ g_{s_{n,n}}.$$

Naturalmente, $F_4^n(g_{s_n}(x)) = x$. Como a composição de funções injetoras é injetora, g_{s_n} é injetora quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e s_n . Além disso, segue de que g_0 e g_1 são monótonas e a composição de funções monótonas é monótona que g_{s_n} também é monótona. Como também a continuidade é preservada, sua imagem é um intervalo $[a, b]$, em que $a = g_{s_n}(0)$ e $b = g_{s_n}(1)$ ou vice-versa.

Agora suponha que s_n e t_n são duas sequências binárias distintas com n termos. Se $\text{Im}(g_{s_n}) \cap \text{Im}(g_{t_n}) \neq \emptyset$, então existem $x, y \in [0, 1]$ tais que

$$g_{s_n}(x) = g_{t_n}(y) \Leftrightarrow (g_{s_{n,1}} \circ \dots \circ g_{s_{n,n}})(x) = (g_{t_{n,1}} \circ \dots \circ g_{t_{n,n}})(y).$$

Se $s_{n,1} = t_{n,1}$, segue da injetividade das funções g_0 e g_1 que

$$(g_{s_{n,2}} \circ \dots \circ g_{s_{n,n}})(x) = (g_{t_{n,2}} \circ \dots \circ g_{t_{n,n}})(y).$$

Assim, prossiga até o primeiro $1 \leq k \leq n$ tal que $s_{n,k} \neq t_{n,k}$. Então, chame $x^* = (g_{s_{n,k+1}} \circ \dots \circ g_{s_{n,n}})(x)$ e $y^* = (g_{t_{n,k+1}} \circ \dots \circ g_{t_{n,n}})(y)$. Supondo, sem perda de generalidade, que $s_{n,k} = 0$ e $t_{n,k} = 1$, tem-se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-y^*} \Leftrightarrow x^* = y^* = 1.$$

Portanto, $g_{s_n}(x) = (g_{s_{n,1}} \circ \dots \circ g_{s_{n,k}})(1)$, ou seja, há apenas um elemento na interseção. Como as imagens são intervalos fechados, então este elemento é uma de suas extremidades.

Defina $g_{s_n}^* : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $g_{s_n}^*(x) = g_{s_n}(x)$. Esta função é evidentemente bijetora. Se $f_{s_n} = (g_{s_n}^*)^{-1}$, então

$$f_{s_n}(x) = \left(F_4^n \circ g_{s_n} \circ (g_{s_n}^*)^{-1} \right) (x) = F_4^n(x),$$

isto é, f_{s_n} é a restrição de F_4^n a $[a, b]$. Para garantir a existência de pontos fixos, comece por $f_{(0,0,\dots,0)} : [0, b] \rightarrow [0, 1]$ e $f_{(1,0,\dots,0)} : [a, 1] \rightarrow [0, 1]$. Há quatro casos a considerar:

- Se $f_{(0,0,\dots,0)}(0) = 0$, então este é um ponto fixo para tal função.
- Se $f_{(0,0,\dots,0)}(0) = 1$, então construa $h(x) = f_{(0,0,\dots,0)}(x) - x$ e veja que $h(0) > 0$ e $h(b) < 0$, de forma que há uma raiz de h em $(0, b)$, isto é, um ponto fixo de $f_{(0,0,\dots,0)}$ em $(0, b)$.
- Se $f_{(1,0,\dots,0)}(1) = 1$, então este é um ponto fixo para tal função.

- Se $f_{(1,0,\dots,0)}(1) = 0$, então construa $h(x) = f_{(1,0,\dots,0)}(x) - x$ e veja que $h(a) > 0$ e $h(1) < 0$, de forma que há uma raiz de h em $(a, 1)$, isto é, um ponto fixo de $f_{(1,\dots,1)}$ em $(a, 1)$.

Considere então qualquer outra sequência binária de n termos s_n . É certo que se $f_{s_n}: [a, b] \rightarrow [0, 1]$, então $0 < a < b < 1$: a desigualdade do meio é trivial; a da esquerda e a da direita se devem ao fato de que se $i \in \{0, 1\}$, então $g_i(x) = 0 \Leftrightarrow i = 0$ e $x = 0$, e $g_i(x) = 1 \Leftrightarrow i = 1$ e $x = 0$.

Portanto, chame $h(x) = f_{s_n}(x) - x$ e note que $h(a) < 0$, $h(b) > 0$ se $f_{s_n}(a) = 0$, e $h(a) > 0$, $h(b) < 0$ se $f_{s_n}(a) = 1$. Isso garante a existência de um ponto fixo para tal função em (a, b) .

Os cálculos acima demonstram que para cada s_n há um ponto fixo de f_{s_n} em seu domínio aberto. Como as interseções dos domínios se dão apenas nas extremidades, cada função f_{s_n} produz ao menos um ponto fixo de F_4^n . Como há 2^n possíveis sequências s_n e, dessa forma, 2^n funções f_{s_n} , então F_4^n tem ao menos 2^n pontos fixos, como se queria demonstrar. ■

Exercício 2.12. Prove que se $x > 1$ ou $x < 0$, então $F_4^n(x) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Solução. Se $x > 1$, então $F_4(x) < 0$, logo, basta analisar o comportamento da função quando $x < 0$. Nesse caso, denote $x_0 = x$ e $x_n = F_4^n(x)$ para todo n natural. Comece observando que se $y < 0$, então $y < 3/4$ e

$$3 > 4y \Leftrightarrow 3y < 4y^2 \Leftrightarrow 4y - 4y^2 < y \Leftrightarrow F_4(y) < y.$$

Dessa forma, (x_n) é uma sequência decrescente. Se é limitada inferiormente, então deve convergir para algum real negativo X . No entanto, sendo F_4 contínua,

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_4(x_n) = F_4\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = F_4(X).$$

Porém, $F_4(X) < X$, de forma que (x_n) não é limitada, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, como desejado. ■

Exercício 2.13. Prove que se $x \in [0, 1]$, $F_4^n(x)$ não vai a $-\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Solução. Basta mostrar que, para todo $x \in [0, 1]$, $F_4(x) \in [0, 1]$. Como F_4 é diferenciável, é também limitada em $[0, 1]$ e assume valores máximo e mínimo. Há apenas um ponto crítico, que satisfaz $F_4'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$. Como $F_4''(x) = -8$, $x = 1/2$ é um ponto de máximo local.

Avaliando o ponto crítico e as extremidades, $F_4(0) = F_4(1) = 0$ são os pontos de mínimo e $F_4(1/2) = 1$ é ponto de máximo, de forma que $0 \leq F_4(x) \leq 1$ quando $x \in [0, 1]$, como desejado. ■

Exercício 2.14. *Descreva a dinâmica de F_λ quando $\lambda > 4$: descreva o conjunto dos pontos cuja órbita vai a $-\infty$ e encontre um valor para λ para o qual $|F'_\lambda| > 1$ para todos os valores de x cuja órbita não tende a $-\infty$.*

Solução. Comece procurando os pontos fixos de F_λ :

$$\lambda x(1-x) = x \Leftrightarrow x[\lambda x + (1-\lambda)] = 0.$$

Logo, os pontos fixos são $x_1 = 0$ e $x_2 = 1 - 1/\lambda$. Como $\lambda > 4$, $3/4 < 1 - 1/\lambda < 1$. Derivando,

$$F'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x \quad \Longrightarrow \quad |F'_\lambda(x_1)| = \lambda \quad \text{e} \quad |F'_\lambda(x_2)| = 2 - \lambda.$$

Como $\lambda > 4$, $2 - \lambda < -2$ e ambos os pontos fixos são repulsores.

Partindo agora para a descrição do conjunto de pontos cuja órbita vai a $-\infty$, note que se $x > 1$, então $1 - x < 0$ e

$$F_\lambda(x) = \lambda x(1-x) < 0.$$

Se $x < 0$, tem-se que $x < 1 - 1/\lambda$, o que implica

$$\lambda x < \lambda - 1 \Rightarrow \lambda x^2 > \lambda x - x \Leftrightarrow \lambda x - \lambda x^2 < x \Leftrightarrow F_\lambda(x) < x.$$

Logo, começando de $x_0 < 0$ e construindo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n = F_\lambda^n(x)$, tem-se uma sequência (x_n) decrescente de termos negativos. Se esta sequência é limitada inferiormente, então deve convergir para um ponto fixo $X < 0$ de F_λ , como discutido anteriormente. Entretanto, tal ponto fixo não existe, e assim a iteração tende a $-\infty$. Resta avaliar o que acontece no intervalo $[0, 1]$.

Primeiro, veja que $x \in [0, 1] \Rightarrow F_\lambda(x) > 0$. Assim, antes de uma iteração se tornar negativa, ela deve alcançar algum valor maior do que 1. Basta descobrir, portanto, quando $F_\lambda(x) > 1$:

$$\lambda x(1-x) > 1 \Leftrightarrow \lambda x^2 - \lambda x + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda}} \right] < x < \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda}} \right].$$

Como $\lambda > 4$, as expressões acima representam números reais de fato. Chame este intervalo aberto de I_1 . Defina $J_1 = [0, 1] \setminus I_1$. Recursivamente, faça

$$I_n = F_\lambda^{-1}(I_{n-1}), \quad J_n = J_{n-1} \setminus I_{n-1}.$$

Seja J a interseção de todos os J_n . Este é um conjunto de Cantor; por definição, os elementos de J permanecem em $[0, 1]$. Todos os outros elementos de $[0, 1]$ têm órbita divergindo para $-\infty$: se $x \in [0, 1]$ e $x \notin J$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin J_m$ e $x \in J_{m-1}$. Logo, $x \in I_{m-1}$ e $F_\lambda^{m-1}(x) \in I_1 \Rightarrow F_\lambda^m(x) > 1$, como esperado.

Para a última parte do exercício, resolva $|F'_\lambda(x)| = |\lambda - 2\lambda x| > 1$:

$$\lambda - 2\lambda x > 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda} < \frac{1}{2}, \quad -\lambda + 2\lambda x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda} > \frac{1}{2}.$$

Como as extremidades de I_1 são os elementos de J mais próximos de $1/2$, basta considerar os casos em que as respectivas extremidades satisfazem as desigualdades. Logo, resolva

$$1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda}} < 1 - \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda}} > 1 + \frac{1}{\lambda}.$$

Ambas são equivalentes a

$$\sqrt{1 - \frac{4}{\lambda}} > \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{\lambda} > \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2 - \sqrt{5} \text{ ou } \lambda > 2 + \sqrt{5}.$$

O caso de interesse é $\lambda > 2 + \sqrt{5}$. ■

2.3 Dinâmica Simbólica

2.3.1 Exercícios

Os exercícios abaixo foram extraídos do Capítulo 9 de [4].

Exercício 2.15. *Liste todos os ciclos de menor período 4 para o shift map.*

Solução. Os ciclos de período primo 4 são

$$\begin{aligned} (\overline{0001}) &\mapsto (\overline{0010}) \mapsto (\overline{0100}) \mapsto (\overline{1000}), \\ (\overline{0011}) &\mapsto (\overline{0110}) \mapsto (\overline{1100}) \mapsto (\overline{1001}), \\ (\overline{0111}) &\mapsto (\overline{1110}) \mapsto (\overline{1101}) \mapsto (\overline{1011}). \end{aligned}$$

Exercício 2.16. *Compute $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}]$, em que*

- (a) $\mathbf{s} = (\overline{100})$, $\mathbf{t} = (\overline{001})$;
- (b) $\mathbf{s} = (\overline{100})$, $\mathbf{t} = (\overline{010})$;
- (c) $\mathbf{s} = (\overline{1011})$, $\mathbf{t} = (\overline{0101})$.

Solução.

$$(a) \quad d[(\overline{100}), (\overline{001})] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|1-0|}{2^{3i}} + \frac{|0-0|}{2^{3i+1}} + \frac{|0-1|}{2^{3i+2}} = \frac{5}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{8^i} = \frac{10}{7};$$

$$(b) \ d[(\overline{100}), (\overline{010})] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|1-0|}{2^{3i}} + \frac{|0-1|}{2^{3i+1}} + \frac{|0-0|}{2^{3i+2}} = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{8^i} = \frac{12}{7};$$

$$(c) \ d[(\overline{1011}), (01\overline{01})] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|1-0|}{2^{4i}} + \frac{|0-1|}{2^{4i+1}} + \frac{|1-0|}{2^{4i+2}} + \frac{|1-1|}{2^{4i+3}} = \frac{7}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} = \frac{28}{15}.$$

■

Exercício 2.17. *Encontre todos os pontos de Σ cuja distância de $(000\dots)$ é exatamente $1/2$.*

Solução. Seja $\mathbf{s} = (s_0s_1s_2\dots) \in \Sigma$ tal que $d[\mathbf{s}, (000\dots)] = 1/2$. Ai,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{2^i} = \frac{1}{2}.$$

Veja que $s_0 = 0$, caso contrário $d[\mathbf{s}, (000\dots)] \geq 1 > 1/2$. Se $s_1 = 1$, então $s_n = 0$ para todo $n > 1$ e $\mathbf{s} = (0100\dots)$. Se $s_1 = 0$, então

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{s_i}{2^i} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2},$$

logo $s_n = 1$ para todo $n > 1$ e $\mathbf{s} = (0011\dots)$.

■

Exercício 2.18. *Encontre todas as seqüências cuja distância a $(000\dots)$ e a $(111\dots)$ é igual.*

Solução. Como a distância entre tais pontos é 2, uma seqüência $\mathbf{s} = (s_0s_1s_2\dots)$ que está no “ponto médio” entre $(000\dots)$ e $(111\dots)$ deve satisfazer

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1-s_i}{2^i} = 2 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{2^i}.$$

Logo, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{2^i} = 1$. Se $s_0 = 1$, então $s_n = 0$ para todo $n > 0$ e $\mathbf{s} = (1000\dots)$. Se $s_0 = 0$, então

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1,$$

dessa forma, $s_n = 1$ para todo $n > 0$ e $\mathbf{s} = (0111\dots)$. Há, portanto, apenas 2 seqüências equidistantes a $(000\dots)$ e $(111\dots)$: $(1000\dots)$ e $(0111\dots)$.

■

Exercício 2.19. *Sejam $M_{01} = \{\mathbf{s} \in \Sigma : s_0 = 0, s_1 = 1\}$ e $M_{101} = \{\mathbf{s} \in \Sigma : s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1\}$. Quais são a menor e a maior distância entre um elemento de M_{01} e um elemento de M_{101} ?*

Solução. Tome $\mathbf{s} = (01s_2s_3\dots) \in M_{01}$ e $\mathbf{t} = (101t_3\dots) \in M_{101}$. Por conseguinte,

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1-s_2}{4} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Então, como $0 \leq s_2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -s_2 \leq 0$,

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1-1}{4} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{0}{2^i} \leq \frac{3}{2} + \frac{1-s_2}{4} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \frac{3}{2} + \frac{1-0}{4} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Logo, $3/2 \leq d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] \leq 2$. Veja que $(0111\dots) \in M_{01}$ dista $3/2$ de $(1011\dots) \in M_{101}$ e $(0100\dots)$ dista 2 de $(1011\dots)$. ■

Exercício 2.20. *Seja $S: \Lambda \rightarrow \Sigma$ a função itinerária*

$$S(x) = (s_0s_1s_2\dots),$$

em que $s_j = 0$ se $Q_c^j(x) \in I_0$ e $s_j = 1$ se $Q_c^j(x) \in I_1$. Prove que, se $\mathbf{s} \in \Sigma$ é um ponto periódico do shift map, então $S^{-1}(\mathbf{s})$ é um ponto periódico de Q_c em Λ com o mesmo período.

Solução. Seja $\mathbf{s} \in \Sigma$ de período n . Logo, $\sigma^n(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$. Chame $x = S^{-1}(\mathbf{s})$. Então, $S(Q_c^n(x)) = \sigma^n(S(x)) = S(x)$. Como S é injetora, $x = Q_c^n(x)$. Assim, x é um ponto periódico de período n de Λ . ■

Exercício 2.21. *Seja Σ_N o espaço das seqüências cujas entradas são os inteiros não negativos $0, 1, \dots, N-1$, e seja σ_N o shift map em Σ_N . Para $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_N$, defina*

$$d_N[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i}.$$

Prove que d_N é uma métrica no conjunto Σ_N e encontre a máxima distância entre duas seqüências de Σ_N .

Solução. Para quaisquer seqüências $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_N$, a série converge e $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}]$ está bem definida:

$$0 \leq \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \leq \frac{N-1}{N^i} \text{ para todo } i \geq 0.$$

Como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = (N-1) \cdot \frac{1}{1-1/N} = N$, a série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i}$ converge para algum valor maior ou igual a zero e menor ou igual a N .

A série é igual a zero se, e somente se, $s_i = t_i$ para todo $i \geq 0$, isto é, $\mathbf{s} = \mathbf{t}$. A simetria segue diretamente da definição e a desigualdade triangular segue da desigualdade triangular do módulo. A maior distância entre dois pontos, como calculado acima, é N . ■

Exercício 2.22. Quantos pontos fixos σ_N possui? Quantos pontos periódicos de menor período igual a 2?

Solução. Se $\mathbf{s} = (s_0s_1s_2\dots)$ é um ponto fixo, então $(s_0s_1s_2\dots) = (s_1s_2s_3\dots)$. Os pontos fixos são, portanto, $(\overline{0}), (\overline{1}), \dots, (\overline{N-1})$. Já os pontos periódicos de período primo igual a 2 são

$$\begin{aligned} (\overline{01}) &\mapsto (\overline{10}), & (\overline{02}) &\mapsto (\overline{20}), & \dots, & & (\overline{0(N-1)}) &\mapsto (\overline{(N-1)0}); \\ (\overline{12}) &\mapsto (\overline{21}), & (\overline{13}) &\mapsto (\overline{31}), & \dots, & & (\overline{1(N-1)}) &\mapsto (\overline{(N-1)1}); \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & (\overline{(N-2)(N-1)}) &\mapsto (\overline{(N-1)(N-2)}). \end{aligned}$$

São um total de $(N-1) + (N-2) + \dots + 1 = N(N-1)/2$ pontos periódicos de período primo igual a 2. ■

Exercício 2.23. Quantos pontos em Σ_N são fixados por σ_N^k ?

Solução. Veja que

$$\sigma_N^k(s_0s_1s_2\dots) = (s_ks_{k+1}s_{k+2}\dots),$$

logo, se $(s_0s_1s_2\dots)$ é um ponto fixo de σ_N^k , então $s_n = s_{n+k}$ para todo $n \geq 0$, isto é,

$$(s_0s_1s_2\dots) = (\overline{s_0s_1\dots s_{k-1}}).$$

São, portanto, N^k pontos fixos para tal função. ■

Exercício 2.24. Prove que $\sigma_N: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ é contínua.

Solução. Tome $\mathbf{s} \in \Sigma_N$ qualquer, $\mathbf{s} = (s_0s_1s_2\dots)$. Selecione $\varepsilon > 0$ arbitrário e escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/N^k < \varepsilon$ e faça $\delta = 1/N^{k+1}$. Aí, se $\mathbf{t} \in \Sigma_N$, $\mathbf{t} = (t_0t_1t_2\dots)$ é tal que $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] < \delta$, então

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} < \frac{1}{N^{k+1}}.$$

Mas aí $s_i = t_i$ para todo $0 \leq i \leq k$ e

$$d[\sigma_N(\mathbf{s}), \sigma_N(\mathbf{t})] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+1} - t_{i+1}|}{N^i} = N \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} < N \cdot \frac{1}{N^{k+1}} < \varepsilon.$$

Assim, σ_N é contínua em \mathbf{s} e, sendo a escolha desse ponto arbitrária, segue que σ_N é contínua em todo Σ_N . ■

Exercício 2.25. Considere a função

$$T(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 1/2, \\ 3 - 3x & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

Como já demonstrado anteriormente, $\Gamma = \{x \in [0, 1] : T^n(x) \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto de Cantor. Defina uma função itinerária $S: \Gamma \rightarrow \Sigma$ e prove que S é um homeomorfismo.

Solução. Defina $I_0 = [0, 1/3]$ e $I_1 = [2/3, 1]$. Seja $S: \Gamma \rightarrow \Sigma$,

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots) \text{ se } x \in I_{s_0}, T(x) \in I_{s_1}, \dots, T^n(x) \in I_{s_n}, \dots$$

I. S é injetora.

Tome $x, y \in \Gamma$ e suponha que $S(x) = S(y)$ mas $x \neq y$.

Chame J_n o intervalo de extremidades $T^n(x)$ e $T^n(y)$. Suponha que, para algum $m \in \mathbb{N}$, J_m é degenerado, isto é, $T^m(x) = T^m(y)$. Mas como T é injetora em I_{s_m} , intervalo que contém $T^m(x) = T^m(y)$, segue que $T^{m-1}(x) = T^{m-1}(y)$. Como T é injetora em $I_{s_{m-1}}$, intervalo que contém $T^{m-1}(x) = T^{m-1}(y)$, segue que $T^{m-2}(x) = T^{m-2}(y)$. Iterativamente, se conclui que $x = y$, um absurdo, de forma que os intervalos J_n não são degenerados.

Como $|T'(t)| = 3$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o Teorema do Valor Médio garante que existem $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{|T^k(x) - T^k(y)|}{|T^{k-1}(x) - T^{k-1}(y)|} = |T'(\xi_k)| = 3$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Logo,

$$|T^n(x) - T^n(y)| = |x - y| \prod_{k=1}^n \frac{|T^k(x) - T^k(y)|}{|T^{k-1}(x) - T^{k-1}(y)|} = 3^n |x - y|,$$

de forma que

$$1 \geq |T^n(x) - T^n(y)| = 3^n |x - y|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isso é um absurdo, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n |x - y| = \infty$, de forma que a hipótese inicial é falsa e S é injetora.

II. S é sobrejetora.

Tome $\mathbf{s} \in \Sigma$, $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Dado um intervalo fechado $J \subseteq [0, 1]$, seja $T^{-n}(J)$ a sua pré-imagem por T^n , $n \in \mathbb{N}$. Se $T_1 = T|_{[0, 1/2]}$ e $T_2 = T|_{[1/2, 1]}$, existem as inversas $T_1^{-1}: [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$ e $T_2^{-1}: [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$,

$$T_1^{-1}(x) = \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad T_2^{-1}(x) = -\frac{x}{3} + 1.$$

Veja que $\text{Im}(T_1^{-1}) = [0, 1/3]$ e $\text{Im}(T_2^{-1}) = [2/3, 1]$. Como essas inversas são contínuas e injetoras, qualquer intervalo fechado J em $[0, 1]$ tem como pré-imagem por T dois intervalos fechados, um em $I_0 = [0, 1/3]$, correspondente a T_1^{-1} , e outro em $I_1 = [2/3, 1]$, correspondente a T_2^{-1} . Defina o conjunto

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{x \in [0, 1] \mid x \in I_{s_0}, T(x) \in I_{s_1}, \dots, T^n(x) \in I_{s_n}\}.$$

É evidente que esse conjunto é igual a

$$I_{s_0} \cap T^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{s_n}).$$

Será provado por indução que cada $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ é um intervalo fechado (e, portanto, não vazio). Comece observando que I_0 e I_1 são intervalos fechados. Suponha então que, para qualquer sequência binária de n dígitos $t_1 \dots t_n$, $I_{t_1 \dots t_n}$ é um intervalo fechado. Logo, dada uma sequência binária de $n + 1$ dígitos $r_0 r_1 \dots r_n$,

$$\begin{aligned} I_{r_0 r_1 \dots r_n} &= I_{r_0} \cap T^{-1}(I_{r_1}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{r_n}) \\ &= I_{r_0} \cap T^{-1}(I_{r_1} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(I_{r_n})) \\ &= I_{r_0} \cap T^{-1}(I_{r_1 \dots r_n}). \end{aligned}$$

Mas aí $I_{r_1 \dots r_n}$ é, por indução, um intervalo fechado, de forma que sua pré-imagem $T^{-1}(I_{r_1 \dots r_n})$ são dois intervalos fechados, um em I_0 e outro em I_1 . Como $I_{r_0} = I_0$ ou I_1 , segue que $I_{r_0 r_1 \dots r_n}$ é um intervalo fechado, completando a indução. Usando que

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap T^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}$$

para todo $n \geq 0$, tem-se que $(I_{s_0 \dots s_n})$ é uma sequência de intervalos fechados encaixados. Assim, vale o Teorema dos Intervalos Encaixados e existe $x \in [0, 1]$ tal que

$$x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n} \Rightarrow x \in I_{s_0}, T(x) \in I_{s_1}, \dots, T^n(x) \in I_{s_n}, \dots,$$

e $S(x) = \mathbf{s}$, como esperado. Além disso, como S é injetora, x é o único ponto nessa interseção, de forma que o tamanho dos intervalos $I_{s_0 \dots s_n}$ tende a zero à medida que n cresce (caso contrário, essa interseção seria ela própria um intervalo).

III. S e S^{-1} são contínuas.

Resta mostrar a continuidade da função e de sua inversa. Dados $\varepsilon > 0$ e $x \in \Gamma$, com $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < \varepsilon$. Aí, considere os intervalos fechados $I_{t_0 \dots t_n}$ para qualquer sequência binária de n dígitos $(t_0 \dots t_n)$.

Tais intervalos são disjuntos: se $(t_0 \dots t_n) \neq (r_0 \dots r_n)$, existe $0 \leq i \leq n$ tal que $t_i \neq r_i$, de forma que, se $y \in I_{t_0 \dots t_n} \cap I_{r_0 \dots r_n}$, então $T^i(x) \in I_{t_i} \cap I_{r_i} = \emptyset$, uma contradição. Aí, tome $\delta > 0$ tal que $\delta < \min \{x - a : a \text{ é uma extremidade de } I_{s_0 \dots s_n}\}$, escolha que é possível pois $|I_{s_0 \dots s_n}| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, o que implica que $(x - \delta, x + \delta) \subseteq I_{s_0 \dots s_n}$.

Dessa forma, tome $y \in \Gamma$ tal que $|x - y| < \delta$, e aí $y \in I_{s_0 \dots s_n} \Rightarrow d[S(x), S(y)] \leq 1/2^n < \varepsilon$ e S é contínua, como desejado.

Por outro lado, dado $\mathbf{s} \in \Sigma$, observe que há 2^n intervalos disjuntos da forma $I_{t_0 \dots t_n}$, todos contidos em $[0, 1]$. Logo, $|I_{s_0 \dots s_n}| \leq 1/2^n$. Então, escolha $\delta = 1/2^{n+1}$, pois $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] < 1/2^{n+1} \Rightarrow s_i = t_i$ para todo $0 \leq i \leq n+1 \Rightarrow |S^{-1}(x) - S^{-1}(y)| < |I_{s_0 \dots s_n s_{n+1}}| \leq 1/2^{n+1} < 1/2^n < \varepsilon$ e S^{-1} é contínua, concluindo a prova. ■

2.4 Caos

Referências para a parte teórica desta seção: [1, 3].

2.4.1 Transitividade e Órbita Densa

No que segue, seja (X, τ) um espaço topológico.

Definição 2.26. *Um subconjunto Y de X é dito denso em X se, e somente se, $\overline{Y} = X$, em que \overline{Y} é o menor subconjunto fechado de X que contém Y .*

Lema 2.27. *Um subconjunto Y de X é denso em X se, e somente se, para todo aberto $U \in \tau$, $Y \cap U \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que Y é denso em X . Suponha, por absurdo, que, para algum aberto não vazio $U \in \tau$, $Y \cap U = \emptyset$. Então, $Y \subseteq X \setminus U$. Mas $X \setminus U \subsetneq X$ e $X \setminus U$ é fechado por definição, logo $X = \overline{Y} \subseteq X \setminus U \subsetneq X$, uma contradição.

Reciprocamente, se para todo aberto $U \in \tau$, $Y \cap U \neq \emptyset$, então suponha, por absurdo, que $\overline{Y} = Z \subsetneq X$. Aí, $X \setminus Z \neq \emptyset$ é um aberto, logo $Y \cap X \setminus Z \neq \emptyset$, mas $Y \subseteq \overline{Y} = Z$, uma contradição. □

Lema 2.28. *Seja (A, d) um espaço métrico. Então, $B \subseteq A$ é denso em A (considerando a topologia em A induzida pela métrica d) se, e somente se, para todo $a \in A$ e $\varepsilon > 0$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$.*

Demonstração. Suponha que B é denso em A . Segundo o **Lema 2.27**, $B \cap U \neq \emptyset$ para todo aberto U . Em particular, dados $a \in A$ e $\varepsilon > 0$, considere a bola aberta $B_\varepsilon(a) = \{x \in A : d(a, x) < \varepsilon\}$. Portanto, $B \cap B_\varepsilon(a) \neq \emptyset$, isto é, existe $b \in B$ que satisfaz $d(a, b) < \varepsilon$.

Reciprocamente, se para todo $a \in A$ e $\varepsilon > 0$ existe $b \in B$ satisfazendo $d(a, b) < \varepsilon$, considere um aberto U qualquer e tome $u \in U$. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(u) \subseteq U$, mas aí existe $b \in B$ satisfazendo $d(u, b) < \delta \Leftrightarrow b \in B_\delta(u) \subseteq U$, isto é, $B \cap U \neq \emptyset$, como desejado. □

Definição 2.29. *Seja $f: X \rightarrow X$. f é dita topologicamente transitiva se, para quaisquer abertos não vazios $U, V \in \tau$, existe k inteiro positivo tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Lema 2.30. *Seja (A, d) um espaço métrico. Então, $f: A \rightarrow A$ é transitiva (considerando a topologia induzida em A por d) somente se, para quaisquer $a, b \in A$ e $\varepsilon > 0$, existem $c \in A$ e n inteiro positivo tais que $d(a, c) < \varepsilon$ e $d(f^n(b), c) < \varepsilon$.*

Demonstração. Suponha que f é transitiva. Então, dados $a, b \in A$ e $\varepsilon > 0$, considere os abertos $B_\varepsilon(a)$ e $B_\varepsilon(b)$. Então, existe k_0 inteiro positivo tal que $f^{k_0}(B_\varepsilon(a)) \cap B_\varepsilon(b) \neq \emptyset$. Tomando um elemento qualquer nessa interseção, tem-se o resultado desejado. \square

Teorema 2.31 (Teorema da Categoria de Baire). *Seja A um espaço métrico completo. Se (A_n) é uma sequência de abertos densos em A , então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em A .*

Demonstração. Segundo o **Lema 2.27**, basta mostrar que, dado um aberto W em A , $W \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \emptyset$. Como A_1 é denso em X , é evidente que $A_1 \cap W \neq \emptyset$; seja $a_1 \in A_1 \cap W$. Como A_1 e W são abertos, $A_1 \cap W$ também o é, de forma que existe $0 < r_1 < 1/2$ satisfazendo

$$\overline{B_{r_1}(a_1)} \subseteq A_1 \cap W.$$

Defina indutivamente as sequências (a_n) e (r_n) da seguinte forma: supondo já definidos a_k e r_k para certo $k \geq 1$, com $0 < r_k < 1/2^k$, considere a interseção $B_{r_k}(a_k) \cap A_{k+1}$. De fato, tal interseção é não vazia, pois A_{k+1} é denso em A . Escolha, então, $a_{k+1} \in B_{r_k}(a_k) \cap A_{k+1}$. Além disso, sendo esta interseção um aberto, existe $0 < r_{k+1} < 1/2^{k+1}$ tal que

$$\overline{B_{r_{k+1}}(a_{k+1})} \subseteq B_{r_k}(a_k) \cap A_{k+1}.$$

A sequência (a_n) é uma sequência de Cauchy: dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{N+1} < \varepsilon$. Então, se $n > m > N$,

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, a_{n-1}) + \cdots + d(a_{m+1}, a_m) \\ &< r_{n-1} + \cdots + r_m < \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^{N+1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como A é um espaço métrico completo, (a_n) converge. Seja a o seu limite. Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ implica que

$$a_n \in B_{r_{n-1}}(a_{n-1}) \cap A_n \subseteq B_{r_{n-2}}(a_{n-2}) \cap A_{n-1} \cap A_n \subseteq \cdots \subseteq B_{r_{n_0}}(a_{n_0}) \cap \left(\bigcap_{i=n_0+1}^n A_i \right),$$

isto é, $a_n \in \overline{B_{r_{n_0}}(a_{n_0})}$. Como este conjunto é fechado, $a = \lim a_n \in \overline{B_{r_{n_0}}(a_{n_0})}$, isto é, para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, $a \in A_{n_0+1}$ e, em particular, $a \in \overline{B_{r_1}(a_1)} \subseteq A_1 \cap W$, isto é, $a \in W \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$, concluindo a demonstração. \square

Teorema 2.32. *Seja A um espaço métrico completo com base enumerável e $f: A \rightarrow A$ uma função contínua. Se f é topologicamente transitiva, então f possui uma órbita densa.*

Demonstração. Seja $(A_i)_{i \geq 0}$ uma base de A . Como f é contínua, vê-se indutivamente que $f^{-n}(A_i)$ é um aberto para todo $n \geq 0$, de forma que para cada $i \geq 0$, $B_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A_i)$ é também um aberto. Da transitividade de f se infere que cada B_i é denso em A .

De fato, para cada $i \geq 0$, dado um aberto não vazio U em A , existe $k \geq 0$ tal que $f^k(U) \cap A_i \neq \emptyset$. Repare que se $f^k(U) \cap A_i \neq \emptyset$ então existe $x \in f^k(U) \cap A_i$, ou seja, existe $x \in A_i$ tal que $x = f^k(y)$ para algum $y \in U$. É evidente que $y \in f^{-k}(A_i)$, de forma que $y \in U \cap f^{-k}(A_i) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap B_i \neq \emptyset$.

Segundo o **Teorema 2.31**, $B = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$ é denso em A . Em particular, B é não vazio; seja $b \in B$. A órbita de b é densa em A :

Seja U um aberto não vazio em A . Como $(A_i)_{i \geq 0}$ é uma base de A , existe $m \geq 0$ tal que $A_m \subseteq U$. Por outro lado $x \in B_m$, de forma que existe $l \geq 0$ tal que $x \in f^{-l}(A_m)$. Aí, $f^l(x) \in A_m \subseteq U$, isto é, a órbita de x intersecta U , como se queria demonstrar. \square

2.4.2 Dependência Sensível das Condições Iniciais

No que segue, seja X um conjunto infinito, (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{O}(x)$ a órbita de $x \in X$ por $f: X \rightarrow X$, uma função contínua.

Lema 2.33. *Sejam q_1 e q_2 pontos periódicos de f . Então, $\mathcal{O}(q_1) \cap \mathcal{O}(q_2) = \emptyset$ ou $\mathcal{O}(q_1) = \mathcal{O}(q_2)$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{O}(q_1) \cap \mathcal{O}(q_2) \neq \emptyset$ e tome $q \in \mathcal{O}(q_1) \cap \mathcal{O}(q_2)$. Sejam n_1 e n_2 os menores períodos de q_1 e q_2 , isto é, $|\mathcal{O}(q_1)| = n_1$ e $|\mathcal{O}(q_2)| = n_2$. Logo, existem $0 \leq k_1 < n_1$ e $0 \leq k_2 < n_2$ satisfazendo $q = f^{k_1}(q_1) = f^{k_2}(q_2)$.

Dessa forma, $f^{n_2-k_2}(q) = f^{n_2+k_1-k_2}(q_1) = q_2 \Rightarrow q_2 \in \mathcal{O}(q_1) \Leftrightarrow \mathcal{O}(q_2) \subseteq \mathcal{O}(q_1)$. Analogamente, $f^{n_1-k_1}(q) = f^{n_1+k_2-k_1}(q_2) = q_1 \Rightarrow q_1 \in \mathcal{O}(q_2) \Rightarrow \mathcal{O}(q_1) \subseteq \mathcal{O}(q_2)$, donde se conclui que $\mathcal{O}(q_1) = \mathcal{O}(q_2)$. \square

Lema 2.34. *Se o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X , então existem órbitas de pontos periódicos disjuntas.*

Demonstração. Tome um ponto periódico q_1 qualquer. Como sua órbita $\mathcal{O}(q_1)$ é finita, é também fechada; se $\mathcal{O}(q_1)$ é um conjunto denso em X , segue que $\mathcal{O}(q_1) = X$, uma contradição com o fato de que X é infinito. Logo, $\mathcal{O}(q_1)$ não é denso em X : como o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X , existe ponto periódico $q_2 \notin \mathcal{O}(q_1) \Rightarrow \mathcal{O}(q_1) \cap \mathcal{O}(q_2) = \emptyset$, como desejado. \square

Lema 2.35. *Se $A \subseteq X$ é um aberto, então $f^{-1}(A)$ é aberto.*

Demonstração. Tome $a^* \in f^{-1}(A)$, isto é, $f(a^*) = a \in A$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subseteq$

A. Da continuidade de f , existe $\delta > 0$ satisfazendo

$$d(a^*, x) < \delta \Rightarrow d(a, f(x)) < \varepsilon.$$

Ou seja, $x \in B_\delta(a^*) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in A$. Segue que $B_\delta(a^*) \subseteq f^{-1}(A)$, de forma que a^* é ponto interior de $f^{-1}(A)$. Como a escolha de a^* é arbitrária, se conclui que $f^{-1}(A)$ é aberto, como desejado. \square

Definição 2.36. *Seja $\mathcal{P}(X) \setminus \emptyset = \mathcal{P}$. Defina $D: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^+$,*

$$D(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}.$$

$D(A, B)$ é chamada a distância entre dois subconjuntos não vazios de X . Se $A = \{a\}$, denote $D(A, B) = D(a, B)$.

Lema 2.37. *A operação D é bem definida, isto é, $\inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \in \mathbb{R}^+$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{P}$. Se $A \cap B = \emptyset$, com A, B finitos, então $D(A, B) > 0$. Além disso, para quaisquer $x \in X$ e $A, B \in \mathcal{P}$,*

$$D(A, B) \leq D(x, A) + D(x, B).$$

Demonstração. Como A e B são não vazios, existem $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$, de forma que $d(a, b) \in \{d(a_0, b_0) : a \in A, b \in B\} \neq \emptyset$. Além disso, tal conjunto é limitado inferiormente por 0, de forma que o ínfimo existe e pertence a \mathbb{R}^+ .

Sendo A, B finitos, suponha que $D(A, B) = 0$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $a_n \in A$ e $b_n \in B$ tais que $d(a_n, b_n) < 1/n$. Mas como A e B são finitos e disjuntos, $\delta = \min \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ existe e é maior que 0; basta tomar $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $1/n < \delta$ para chegar a uma contradição.

Para a terceira afirmação, veja que para todo $\varepsilon > 0$ existem $a \in A$ e $b \in B$ satisfazendo $d(x, a) - D(x, A) < \varepsilon/2$ e $d(x, b) - D(x, B) < \varepsilon/2$. Logo,

$$D(A, B) \leq d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) < D(x, A) + D(x, B) + \varepsilon,$$

o que implica que $D(A, B) \leq D(x, A) + D(x, B)$, como desejado. \square

Teorema 2.38. *Se f é transitiva e o conjunto de seus pontos periódicos é denso em X , então f exibe dependência sensível das condições iniciais.*

Demonstração. Escolha dois pontos periódicos q_1 e q_2 de f cujas órbitas são disjuntas (a existência de tais pontos é garantida pelo **Lema 2.34**). Como $\mathcal{O}(q_1) \neq \mathcal{O}(q_2)$, segue do **Lema 2.37** que $\delta_0 = D(\mathcal{O}(q_1), \mathcal{O}(q_2)) > 0$. Mas aí, para qualquer $x \in X$,

$$D(x, \mathcal{O}(q_1)) + D(x, \mathcal{O}(q_2)) \geq D(\mathcal{O}(q_1), \mathcal{O}(q_2)) > \delta_0,$$

de forma que $D(x, \mathcal{O}(q_i)) \geq \delta_0/2$ para algum $i \in \{1, 2\}$. Seja $\delta = \delta_0/8$.

Escolha $x \in X$ arbitrário e N uma vizinhança qualquer desse ponto. Considere a bola aberta de centro x $B_\delta(x)$ e tome o aberto $U = N \cap B_\delta(x)$. Como os pontos periódicos de f são densos em X , deve haver um ponto periódico p em U . Seja n o seu período. Seja q , como no parágrafo anterior, um ponto periódico tal que $D(x, \mathcal{O}(q)) > 4\delta$. Construa

$$V = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B_\delta(f^i(q))).$$

De acordo com o **Lema 2.35**, cada conjunto $f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$ é aberto, e aí V também é aberto (e evidentemente não vazio, visto que $q \in V$). Segue da transitividade de f que existem $y \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $f^k(y) \in V$. Denote $j = \lfloor k/n + 1 \rfloor$ e observe que $1 \leq nj - k \leq n(k/n + 1) - k = n$.

Portanto, $V \subseteq f^{-nj+k}(B_\delta(f^{nj-k}(q))) \Rightarrow f^{nj-k}(V) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q))$. Mas note que

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \Rightarrow f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

Como $f^n(p) = p$, segue que $f^{nj}(p) = p$. Então,

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &= d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj}(y)) - d(x, p) \\ &\geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) - d(x, p) > 2\delta, \end{aligned}$$

pois $d(x, f^{nj-k}(q)) \geq D(x, \mathcal{O}(q)) = 4\delta$, $d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) < \delta$ e $d(x, p) < \delta$. Mas usando a desigualdade triangular mais uma vez,

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) \geq d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 2\delta,$$

o que implica que $d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > \delta$ ou $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$. Como $p, y \in N$, a demonstração está concluída. \square

2.4.3 Exercícios

Os exercícios abaixo foram extraídos do Capítulo 10 de [4].

Exercício 2.39. *Decida quais dos conjuntos a seguir são densos em $[0, 1]$:*

- (a) *O conjunto de Cantor \mathcal{K} ;*
- (b) *O complemento do conjunto de Cantor $[0, 1] \setminus \mathcal{K}$;*
- (c) *O complemento de um subconjunto de $[0, 1]$ que possui uma quantidade enumerável de elementos.*

Solução. (a) O conjunto de Cantor não é denso em $[0, 1]$. De fato, qualquer ponto de $(1/3, 2/3)$ não é limite de uma sequência de pontos contida em \mathcal{K} : dado $1/3 < x < 2/3$, seja $\varepsilon = \min(x - 1/3, 2/3 - x)$. Aí, qualquer ponto de \mathcal{K} dista no mínimo ε de x e nenhuma sequência de elementos de \mathcal{K} pode convergir para x .

(b) Este conjunto é denso em $[0, 1]$. Seja $x \in [0, 1]$. Se $x \notin \mathcal{K}$, então obviamente existe termo em $[0, 1] \setminus \mathcal{K}$ arbitrariamente próximo de x . Se $x \in \mathcal{K}$, então escrevendo x em sua expansão ternária,

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots, \quad x_i \in \{0, 2\} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^n < \varepsilon$ e tome $x' = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n 1 x_{n+2} \dots$, isto é, troque o algarismo na $n + 1$ -ésima casa de x em sua expansão ternária por 1. Aí,

$$|x - x'| = \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Segue do **Lema 2.28** que $[0, 1] \setminus \mathcal{K}$ é denso em $[0, 1]$.

(c) Seja X o tal conjunto. X é denso em $[0, 1]$: seja $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ o conjunto dos pontos de $[0, 1]$ que não está em X . Aí, dado $x_i, i \in \mathbb{N}$, tome $0 < \varepsilon < \min\{x_i, 1 - x_i\}$ qualquer e considere o conjunto $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \subseteq [0, 1]$. Esse intervalo é não degenerado e, portanto, não enumerável. Como $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ é enumerável, existe algum elemento de X em $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$. Segundo o **Lema 2.28**, tem-se a conclusão desejada. ■

Exercício 2.40. Decida quais dos conjuntos a seguir são densos em Σ :

- (a) O conjunto $T_1 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) : s_4 = 0\}$;
- (b) O complemento T_2 do conjunto T_1 ;
- (c) O conjunto $T_3 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) : \text{a sequência termina em zeros}\}$;
- (d) O conjunto $T_4 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) : \text{no máximo um dos } s_j = 0\}$;
- (e) O conjunto $T_5 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) : \text{há infinitos } s_j = 0\}$;
- (f) O complemento T_8 do conjunto $T_7 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) : \text{sem dois } s_j = 0 \text{ seguidos}\}$.

Solução. (a) Este conjunto não é denso em Σ . De fato, dado $\mathbf{s} \in T_1$ e $\mathbf{t} \in \Sigma$ tal que $t_4 = 1$,

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{1}{16},$$

de forma que não há elementos em T_1 arbitrariamente próximos de \mathbf{t} .

(b) $T_2 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_4 = 1\}$ também não é denso em Σ , pela mesma razão.

(c) Este conjunto é denso em Σ . Dado $\mathbf{t} \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{n-1} < \varepsilon$. Então, tome

$$\mathbf{s} = (t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1} 00 \dots) \in T_3$$

e repare que

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|t_i - 0|}{2^i} \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

O resultado segue do **Lema 2.28** mais uma vez.

(d) Este conjunto não é denso em Σ . Se $\mathbf{t} = (000\dots)$, então $\mathbf{s} \in T_4$ implica que $s_k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$, de forma que

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = \sum_{i \geq 1, i \neq k} \frac{1}{2^i} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

(e) Este conjunto é denso em Σ , pois $T_3 \subseteq T_5$.

(f) Este conjunto é denso em Σ . Veja que

$$T_8 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) \mid \exists j \in \mathbb{N} \text{ tal que } s_j = s_{j+1} = 0\},$$

de forma que $T_3 \subseteq T_8$, o que implica o resultado desejado. ■

Exercício 2.41. *Encontre uma sequência não trivial de pontos periódicos em Σ que converge para $(01\overline{01})$.*

Solução. Defina a sequência (\mathbf{s}_n) de pontos periódicos tal que, fixado $2n \in \mathbb{N}$, faça $s_{2i} = 0$ quando $0 \leq i \leq n-1$, $s_{2i+1} = 1$ quando $0 \leq i \leq n-1$ e $s_{2n} = 1$ e construa

$$\mathbf{s}_{2n} = (\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_{2n}}).$$

Fixado $2n+1 \in \mathbb{N}$, faça $s_{2i} = 0$ quando $0 \leq i \leq n$, $s_{2i+1} = 1$ quando $0 \leq i \leq n-1$ e $s_{2n+1} = 0$ e construa

$$\mathbf{s}_{2n+1} = (s_0 s_1 s_2 \dots s_{2n+1}).$$

Evidentemente (\mathbf{s}_n) converge para $(01\overline{01})$. ■

Exercício 2.42. *Prove que a função diádica dada por*

$$D(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2, \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2, \end{cases}$$

é caótica em $[0, 1]$.

Solução. Comece observando que todo racional de denominador ímpar em $[0, 1)$ é ponto periódico de D . De fato, seja n um inteiro positivo e veja que os pontos fixos de D^n são 0 e os racionais $1/(2^n - 1), \dots, 2^n/(2^n - 1)$.

Isto se verifica indutivamente: para todo $0 \leq i \leq 2^n - 1$, a restrição de D^n a $[i/2^n, (i +$

1)/ 2^n) é tal que

$$D^n(x) = 2^n x - i \quad \forall x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right).$$

Quando $n = 1$, esta afirmação é obviamente verdadeira. Supondo-a verdadeira para $n = k \geq 1$, considere $n = k + 1$: observe primeiro que $D^{k+1} = D^k \circ D$. Aí, dado $0 \leq i \leq 2^{k+1} - 1$, tome $x \in [i/2^{k+1}, (i+1)/2^{k+1})$ e repare que, se $i = 2j$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$, então

$$D^k(x) = 2^k x - j \Rightarrow 0 \leq D^k(x) < \frac{1}{2},$$

aí $D^{k+1}(x) = 2D^k(x) = 2^{k+1} - 2j = 2^{k+1} - i$. Por outro lado, se $i = 2j+1$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$, então

$$D^k(x) = 2^k x - j \Rightarrow \frac{1}{2} \leq D^k(x) < 1,$$

aí $D^{k+1}(x) = 2D^k(x) - 1 = 2^{k+1} - 2j - 1 = 2^{k+1} - i$, completando a indução. Assim, fica evidente quais são os pontos periódicos de D . É fácil verificar que esse conjunto é denso em $[0, 1)$.

Agora seja $x \in [0, 1)$ o número cuja expansão binária consiste em todas as possíveis seqüências finitas de 0s e 1s:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots = 0, \boxed{0} \boxed{1} \boxed{00} \boxed{01} \boxed{10} \boxed{11} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

Em binário, a aplicação D se comporta da mesma forma que o shift map: dado $y \in [0, 1)$, $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ em binário, tem-se que: se $y_1 = 0$ (e existe algum $i \geq 1$ tal que $y_i = 0$), então $y < 1/2$ e $D(y) = 2y = 0, y_2 y_3 y_4 \dots$; se $y_1 = 1$, então $y \geq 1/2$ e $D(y) = 2y - 1 = 1, y_2 y_3 y_4 \dots - 1 = 0, y_2 y_3 y_4 \dots$. A única exceção a essa fórmula ocorre quando $1/2$ é escrito como $0, 111 \dots$.

Como $D^n(x)$ é evidentemente diferente de $0, 111 \dots$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, segue que $D^n(x) = 0, x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots$. A órbita de x por D é, portanto, densa em $[0, 1)$, e segue que este sistema é transitivo. Basta exibir dependência sensível das condições iniciais: defina $\beta = 1/3$. Tome $x, y \in [0, 1)$ distintos. Suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $p_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{p_n - 1}{2^n} \leq x < \frac{p_n}{2^n}.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ o maior número tal que $x, y \in \left[\frac{p_k - 1}{2^k}, \frac{p_k}{2^k} \right)$. Assim,

$$\frac{p_k - 1}{2^k} \leq x < y < \frac{p_k}{2^k} \Rightarrow \frac{2p_k - 2}{2^{k+1}} \leq x < \frac{2p_k - 1}{2^{k+1}} \leq y < \frac{2p_k}{2^{k+1}};$$

caso contrário, isto é, caso $x \geq (2p_k - 1)/2^{k+1}$ ou $y \leq (2p_k - 1)/2^{k+1}$, então

$$x, y \in \left[\frac{p_{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \frac{p_{k+1}}{2^{k+1}} \right), p_{k+1} = 2p_k, \quad \text{ou} \quad x, y \in \left[\frac{q_{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \frac{q_{k+1}}{2^{k+1}} \right), q_{k+1} = 2p_k - 1,$$

contradizendo a maximalidade de k . Segue que

$$x, y \in \left[\frac{p_k - 1}{2^k}, \frac{p_k}{2^k} \right) \quad \text{e} \quad x \in \left[\frac{2p_k - 2}{2^{k+1}}, \frac{2p_k - 1}{2^{k+1}} \right), y \in \left[\frac{2p_k - 1}{2^{k+1}}, \frac{2p_k}{2^{k+1}} \right).$$

Isso implica que

$$D^k(x) = 2^k x - p_k + 1, \quad D^k(y) = 2^k y - p_k + 1 \Rightarrow |D^k(x) - D^k(y)| = 2^k |x - y|.$$

Se $2^k |x - y| \geq 1/3$, não há mais nada a fazer. Caso contrário, tem-se que

$$|D^{k+1}(x) - D^{k+1}(y)| = |2^{k+1}(x - y) - 1| \geq 1 - 2^{k+1}|x - y| > 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Isso conclui a demonstração. ■

Exercício 2.43. Prove que a função

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1/2, \\ 2 - 2x & \text{se } x > 1/2, \end{cases}$$

é caótica em $[0, 1]$.

Solução. Observe que

$$(T \circ D)(x) = (T \circ T)(x)$$

para todo $x \in [0, 1)$. De fato,

- se $x \in [0, 1/4)$, $T(D(x)) = T(2x) = 4x$ e $T(T(x)) = T(2x) = 4x$;
- se $x \in [1/4, 1/2)$, $T(D(x)) = T(2x) = 2 - 4x$ e $T(T(x)) = T(2x) = 2 - 4x$;
- se $x \in [1/2, 3/4)$, $T(D(x)) = T(2x - 1) = 4x - 2$ e $T(T(x)) = T(2 - 2x) = 4x - 2$;
- se $x \in [3/4, 1)$, $T(D(x)) = T(2x - 1) = 4 - 4x$ e $T(T(x)) = T(2 - 2x) = 4 - 4x$.

Se $f = T|_{[0,1]}$, então f é uma semiconjugação. Como D é caótico, segue que T possui um conjunto denso de órbitas periódicas e uma órbita densa. Para mostrar a dependência sensível, basta usar argumento completamente análogo ao do exercício anterior. ■

Exercício 2.44. Use os resultados do exercício anterior para construir uma conjugação entre T no intervalo $[0, 1]$ e $G(x) = 2x^2 - 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

Solução. Seja $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$,

$$f(x) = \cos(\pi x).$$

Aí, é evidente que f é um homeomorfismo: a continuidade é trivial e a função cosseno restrita a $[0, \pi]$ é bijetora (considerando o contradomínio $[-1, 1]$). Agora perceba que, se $x \in [0, 1]$, então

$$\begin{aligned} (f \circ T)(x) &= \begin{cases} f(2x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ f(2 - 2x) & \text{se } 1/2 < x \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ \cos(2\pi(1 - x)) & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Veja, no entanto, que $\cos(2\pi(1 - x)) = \cos(2\pi - 2\pi x) = \cos(2\pi x) = 2\cos^2(\pi x) - 1$. Assim, $(f \circ T)(x) = 2\cos^2(\pi x) - 1$. Por outro lado,

$$(G \circ f)(x) = G(\cos(\pi x)) = 2\cos^2(\pi x) - 1.$$

Dessa forma, $f \circ T = G \circ f$ e f é uma conjugação entre T e G . ■

Exercício 2.45. *Construa uma conjugação válida em todo \mathbb{R} entre G do exercício anterior e Q_{-2} .*

Solução. Como sugerido, seja $f(x) = ax + b$:

$$f \circ G = Q_{-2} \circ f \Leftrightarrow aG(x) + b = Q_{-2}(ax + b) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$2ax^2 - a + b = (ax + b)^2 - 2 = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2.$$

Basta que $2a = a^2$, $2ab = 0$ e $-a + b = b^2 - 2$. $a = 2$ e $b = 0$ satisfazem tais condições, de forma que $f(x) = 2x$ é a conjugação desejada. ■

Exercício 2.46. *Prove que $F_4(x) = 4x(1 - x)$ é caótica em $[0, 1]$.*

Solução. Defina $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \text{sen}^2(\pi x/2)$. Observe que f é bijetora e contínua. Além disso, $f \circ T = F_4 \circ f$:

$$\begin{aligned} (F_4 \circ f)(x) &= 4\text{sen}^2(\pi x/2)(1 - \text{sen}^2(\pi x/2)) \\ &= (2\text{sen}(\pi x/2)\cos(\pi x/2))^2 \\ &= \text{sen}^2(\pi x); \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(f \circ T)(x) &= \begin{cases} f(2x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ f(2-2x) & \text{se } 1/2 < x \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{sen}^2(\pi x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ \text{sen}^2(\pi - \pi x) & \text{se } 1/2 < x \leq 1, \end{cases}\end{aligned}$$

mas $\text{sen}(\pi - \pi x) = \text{sen}(\pi x)$, logo $\text{sen}^2(\pi - \pi x) = \text{sen}^2(\pi x)$ e f é uma conjugação.

Todas as condições para o comportamento caótico seguem dessa conjugação topológica. Em particular, a dependência sensível das condições iniciais segue do seguinte argumento:

É necessário mostrar que existe $\beta > 0$ tal que, se $|x - y| > 1/3$, então $|f(x) - f(y)| > \beta$ para quaisquer $x, y \in [0, 1]$. Por absurdo, se um tal β não existe, então para cada $\delta > 0$ existem $x_\delta, y_\delta \in [0, 1]$ satisfazendo $|x_\delta - y_\delta| > 1/3$ e $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| < \delta$. Considere as sequências de pontos (x_n) e (y_n) em $[0, 1]$ tais que $|x_n - y_n| > 1/3$ e $|f(x_n) - f(y_n)| < 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $[0, 1]$ é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente $(x_{n_{k_j}})$, de limite a , e $(y_{n_{k_j}})$ possui uma sequência convergente $(y_{n_{k_j}})$, de limite b . Aí

$$|x_{n_{k_j}} - y_{n_{k_j}}| > \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad |f(x_{n_{k_j}}) - f(y_{n_{k_j}})| < \frac{1}{2^{n_{k_j}}}.$$

Aplicando o limite e usando a continuidade do módulo e da função f , $|a - b| > 1/3$ e $|f(a) - f(b)| = 0$, um absurdo, pois f é estritamente crescente. Portanto, um tal β deve existir.

Tome $\varepsilon > 0$ e $x \in [0, 1]$ quaisquer. Aí, escolha $y \in [0, 1]$ tal que $|x - y| < \varepsilon$. Então, segundo o **Exercício 2.43**, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|T^n(f^{-1}(x)) - T^n(f^{-1}(y))| > 1/3$.

Aí é evidente que $|F_4(x) - F_4(y)| = |f(T^n(f^{-1}(x))) - f(T^n(f^{-1}(y)))| > \beta$, concluindo a demonstração. ■

Exercício 2.47. Prove que o “mapa triádico” em S^1 dado por $F(\theta) = 3\theta$ é caótico.

Solução. Comece observando que todo ponto de S^1 cujo ângulo com o eixo x é da forma $k \cdot 2\pi/(3^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k < 3^n - 1$ é um ponto periódico de F . De fato, se $(x, y) \in S^1$, então existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $(x, y) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$, e F satisfaz

$$F(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) = (\cos(3\theta), \text{sen}(3\theta)).$$

Logo, se (a, b) é da forma descrita acima, isto é, $a = \cos(k \cdot 2\pi/(3^n - 1))$ e $b =$

$\text{sen}(k \cdot 2\pi/(3^n - 1))$, então

$$F^n(a, b) = \left(\cos \left(3^n k \cdot \frac{2\pi}{3^n - 1} \right), \text{sen} \left(3^n k \cdot \frac{2\pi}{3^n - 1} \right) \right),$$

mas vale que

$$\begin{aligned} \cos \left(3^n k \cdot \frac{2\pi}{3^n - 1} \right) &= \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{3^n - 1} + k \cdot \left((3^n - 1) \cdot \frac{2\pi}{3^n - 1} \right) \right) \\ &= \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{3^n - 1} + k \cdot 2\pi \right) = \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{3^n - 1} \right) \end{aligned}$$

e o mesmo para o seno. Logo, $F^n(a, b) = (a, b)$, como esperado. O conjunto de tais pontos é denso em S^1 (considerando, naturalmente, a métrica euclidiana usual de \mathbb{R}^2): dados $(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ em S^1 e $\varepsilon > 0$, segue da continuidade de $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ satisfazendo $|\alpha - x| < \delta_1 \Rightarrow |\cos(\alpha) - \cos(x)| < \varepsilon/2$ e $|\alpha - x| < \delta_2 \Rightarrow |\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(x)| < \varepsilon/2$.

Sejam $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $2\pi/(3^m - 1) < \delta$. Então, existe $p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p < 3^m - 1$, tal que

$$2\pi \cdot \frac{p}{3^m - 1} \leq \alpha < 2\pi \cdot \frac{p+1}{3^m - 1}.$$

Chame $y = 2\pi p/(3^m - 1)$. Observe que $|\alpha - y| < 2\pi/(3^m - 1) < \delta$ e aí denote $(a, b) = (\cos(y), \text{sen}(y))$, um ponto periódico de F . Assim,

$$\begin{aligned} \|(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)) - (a, b)\| &= \sqrt{[\cos(\alpha) - \cos(y)]^2 + [\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(y)]^2} \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

como desejado. Quanto à órbita densa, basta considerar o ponto cujo ângulo com o eixo x é 2π vezes o número entre 0 e 1 cuja expansão em base ternária contém todas as seqüências finitas de 0s, 1s e 2s:

$$y = 2\pi \cdot 0, y_1 y_2 y_3 \dots = 2\pi \cdot 0, \boxed{0} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{00} \boxed{01} \boxed{02} \dots = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}.$$

A aplicação F atua de forma similar ao shift map no espaço de seqüências ternárias: a demonstração de que a órbita desse ponto é densa em S^1 é análoga.

Resta, afinal, provar a dependência sensível das condições iniciais. Defina $\beta = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\pi/9)}$. Tome $x \in [0, 2\pi]$ e faça $y = x/2\pi$. Se $0, y_1 y_2 y_3 \dots$ é a expansão ternária de y , então

$$x = 2\pi \cdot 0, y_1 y_2 y_3 \dots \Rightarrow 3x = 2\pi \cdot y_1, y_2 y_3 y_4 \dots = 2\pi y_1 + 2\pi \cdot 0, y_2 y_3 y_4 \dots,$$

mas $\cos(2\pi y_1 + 2\pi \cdot 0, y_2 y_3 y_4 \dots) = \cos(2\pi \cdot 0, y_2 y_3 y_4 \dots)$, de forma que

$$\begin{aligned} F(\cos(2\pi \cdot 0, y_1 y_2 y_3 \dots), \text{sen}(2\pi \cdot 0, y_1 y_2 y_3 \dots)) &= \\ &= (\cos(2\pi \cdot 0, y_2 y_3 y_4 \dots), \text{sen}(2\pi \cdot 0, y_2 y_3 y_4 \dots)). \end{aligned}$$

Denote σ para o shift map da expansão ternária. Então, a fórmula acima assume o seguinte formato:

$$F(\cos(2\pi \cdot y), \text{sen}(2\pi \cdot y)) = (\cos(2\pi \cdot \sigma(y)), \text{sen}(2\pi \cdot \sigma(y))).$$

Dados $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ e $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ elementos de $[0, 1]$ distintos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq y_n$. Seja k o menor n possível.

I. Suponha que $|x_k - y_k| = 2$.

i. Se $|x_{k+1} - y_{k+1}| = 0$,

$$\begin{aligned} |\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| \geq \frac{2}{3} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{i+1}} \geq \frac{2}{3} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{5}{9}; \\ |\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| \leq \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{i+1}} \leq \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

ii. Se $|x_{k+1} - y_{k+1}| = 1$,

$$\begin{aligned} |\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| \geq \frac{2}{3} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{i+1}} \geq \frac{5}{9} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{4}{9}; \\ |\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| \leq \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{i+1}} \leq \frac{7}{9} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

II. Suponha que $|x_k - y_k| = 2$ e $|x_{k+1} - y_{k+1}| = 2$. Se, para algum $n > k + 1$, $|x_n - y_n| \neq 2$, considere n_0 o menor de tais números; aí $|x_{n_0-1} - y_{n_0-1}| = 2$ e este passa a ser o caso **I**. Suponha então que $|x_n - y_n| = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

i. Se para algum $j \geq k$, $x_j - y_j = 2$ e $x_{j+1} - y_{j+1} = -2$ ou vice-versa,

$$\begin{aligned} |\sigma^{j-1}(x) - \sigma^{j-1}(y)| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{j+i} - y_{j+i}}{3^{i+1}} \right| \geq \frac{4}{9} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|x_{j+i} - y_{j+i}|}{3^{i+1}} \geq \frac{4}{9} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{1}{3}; \\ |\sigma^{j-1}(x) - \sigma^{j-1}(y)| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{j+i} - y_{j+i}}{3^{i+1}} \right| \leq \frac{4}{9} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|x_{j+i} - y_{j+i}|}{3^{i+1}} \leq \frac{4}{9} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

ii. Caso contrário, $x_n - y_n = 2$ para todo $n \geq k$ (ou $x_n - y_n = -2$ para todo $n \geq k$).

Supondo que $k > 1$,

$$|\sigma^{k-2}(x) - \sigma^{k-2}(y)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k-1+i} - y_{k-1+i}}{3^{i+1}} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{1}{3}.$$

Se $k = 1$, então $|x - y| = 1 \Rightarrow 2\pi|x - y| = 2\pi$ e x e y correspondem ao mesmo ângulo: este caso pode ser ignorado.

III. Suponha que $|x_k - y_k| = 1$.

i. Se $|x_{k+1} - y_{k+1}| = 0$,

$$|\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| \geq \frac{1}{3} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{i+1}} \geq \frac{1}{3} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{2}{9};$$

$$|\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| \leq \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{i+1}} \leq \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{4}{9}.$$

ii. Se $|x_{k+1} - y_{k+1}| = 1$,

$$|\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| \geq \frac{1}{3} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{i+1}} \geq \frac{2}{9} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{1}{9};$$

$$|\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| \leq \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{i+1}} \leq \frac{4}{9} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{5}{9}.$$

IV. Suponha que $|x_k - y_k| = 1$ e $|x_{k+1} - y_{k+1}| = 2$. Se, para algum $n > k + 1$, $|x_n - y_n| \neq 2$, seja n_0 o menor de tais números. Aí, $|x_{n_0-1} - y_{n_0-1}| = 2$ e este é o caso **I** acima. Suponha então que $|x_n - y_n| = 2$ para todo $n > k + 1$.

i. Se existe $j > k + 1$ tal que $x_j - y_j = 2$ e $x_{j+1} - y_{j+1} = -2$ ou vice-versa, este passa a ser o caso **II.i** acima.

ii. Caso contrário, tem-se que $x_n - y_n = 2$ ou $x_n - y_n = -2$ para todo $n \geq k + 1$. Se $x_k - y_k = 1$ e $x_n - y_n = 2$ para todo $n \geq k + 1$ (ou $x_k - y_k = -1$ e $x_n - y_n = -2$ para todo $n \geq k + 1$), então

$$|\sigma^{k-1}(x) - \sigma^{k-1}(y)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_{k+i} - y_{k+i}}{3^{i+1}} \right| = \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{2}{3}.$$

Por outro lado, se $x_k - y_k = 1$ e $x_n - y_n = -2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ou $x_k - y_k = -1$ e

$x_n - y_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$|x - y| = \left| \sum_{i=k}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{3^i} \right| = \frac{1}{3^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = 0,$$

uma contradição, pois $x \neq y$.

Finalmente, para quaisquer $x = 0, x_1x_2x_3 \dots$ e $y = 0, y_1y_2y_3 \dots$ elementos de $[0, 1]$ em expansão ternária, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{9} \leq |\sigma^n(x) - \sigma^n(y)| \leq \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{\pi}{9} < |2\pi \cdot \sigma^n(x) - 2\pi \cdot \sigma^n(y)| < 2\pi - \frac{\pi}{9}.$$

Dados $x = (\cos(a), \sin(a))$ e $y = (\cos(b), \sin(b))$ em S^1 , sejam $a = 2\pi \cdot 0, a_1a_2a_3 \dots = 2\pi a_0$ e $b = 2\pi \cdot 0, b_1b_2b_3 \dots = 2\pi b_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \|F^n(x) - F^n(y)\| &= \sqrt{[\cos(3^n a) - \cos(3^n b)]^2 + [\sin(3^n a) - \sin(3^n b)]^2} \\ &= \sqrt{2 - 2[\cos(3^n a) \cos(3^n b) + \sin(3^n a) \sin(3^n b)]} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(3^n(a - b))} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(2\pi(\sigma^n(a_0) - \sigma^n(b_0)))} \end{aligned}$$

Mas veja que, de acordo com a restrição acima, $\cos(2\pi(\sigma^n(a_0) - \sigma^n(b_0))) < \cos(\pi/9)$. Então,

$$\|F^n(x) - F^n(y)\| > \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\pi/9)} = \beta,$$

concluindo a demonstração. ■

2.5 Teorema de Sarkovskii

Referências para a parte teórica dessa seção: [8, 5]

2.5.1 Período Três Implica Caos

No que segue, sejam I e J intervalos (não degenerados) em \mathbb{R} .

Lema 2.48. *Se $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então para cada intervalo compacto $I' \subseteq G(I)$ existe um intervalo compacto $Q \subseteq I$ tal que $G(Q) = I'$.*

Demonstração. Suponha que $I' = [G(p), G(q)]$ para certos $p, q \in I$ (naturalmente, $G(p) \neq G(q)$). Suponha que $p < q$. Então, considere o conjunto

$$A = \{x \in [p, q] : G(x) = G(p)\}.$$

A é limitado e não vazio ($p \in A$); chame $\alpha = \sup A$. Dessa forma, existe sequência (x_n) em A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, logo $G(\alpha) = G(p)$. Isso implica que $p \leq \alpha < q$. Em

seguida, considere outro conjunto

$$B = \{x \in I : x > \alpha \text{ e } G(x) = G(q)\}.$$

B é limitado e não vazio ($q \in A$); chame $\beta = \inf B$. Em razão da continuidade de G , $G(\beta) = G(q)$, como acima. Como $q \in B$, tem-se que $p \leq \alpha < \beta \leq q$.

Assim, tem-se que $G([\alpha, \beta]) \subseteq [G(\alpha), G(\beta)] = I'$: se $x \in (\alpha, \beta)$, então $G(\alpha) \leq G(x)$; caso contrário, isto é, caso $G(x) < G(\alpha)$, segue de que $G(\alpha) < G(\beta)$ e do **Teorema do Valor Intermediário** que existe $y \in (x, \beta) \subseteq [p, q]$ satisfazendo $G(y) = G(\alpha) = G(p)$, isto é, $y \in A$. No entanto, $y > x > \alpha = \sup A$, uma contradição.

De forma análoga, $G(x) \leq G(\beta)$; caso $G(\beta) < G(x)$, $G(\alpha) < G(\beta)$ e o **Teorema do Valor Intermediário** implicam que existe y , $y \in (\alpha, x)$, satisfazendo $G(y) = G(\beta) = G(q)$, isto é, $y \in B$. No entanto, $y < x < \beta = \inf B$, uma contradição.

Por outro lado, a continuidade de G e o fato de que $G(\alpha) = G(p)$ e $G(\beta) = G(q)$ e novamente o **Teorema do Valor Intermediário** implicam a continência recíproca $[G(\alpha), G(\beta)] \subseteq G([\alpha, \beta])$, concluindo a demonstração. \square

Lema 2.49. *Sejam $F: J \rightarrow J$ uma função contínua e (I_n) uma sequência de intervalos compactos tais que $I_n \subseteq J$ e $I_{n+1} \subseteq F(I_n)$ para todo $n \geq 0$. Então, existe uma sequência (Q_n) de intervalos compactos tais que $Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq I_0$ e $F^n(Q_n) = I_n$ para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Defina $Q_0 = I_0$. Por definição, $F^0(Q_0) = Q_0 = I_0$. Suponha então que para algum $n \geq 0$ Q_n está definido, $Q_n \subseteq I_0$ e $F^n(Q_n) = I_n$. Denotando $I = Q_n$, tome $G: I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G(x) = F^{n+1}(x) \text{ para todo } x \in I.$$

Por hipótese, $I' = I_{n+1} \subseteq F(I_n) = F(F^n(Q_n)) = F^{n+1}(Q_n) = G(I)$. Aplicando o **Lema 2.48**, existe um intervalo compacto $Q \subseteq I$ tal que $G(Q) = I'$. Chamando $Q = Q_{n+1}$, segue que $Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq I_0$ e $F^{n+1}(Q_{n+1}) = I_{n+1}$, completando a indução. \square

Lema 2.50. *Seja $G: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $I \subseteq J$ um intervalo compacto e suponha que $I \subseteq G(I)$. Então, existe $p \in I$ tal que $G(p) = p$.*

Demonstração. Seja $I = [\beta_0, \beta_1]$. Logo, existem $\alpha_0, \alpha_1 \in I$ tais que $G(\alpha_0) = \beta_0$ e $G(\alpha_1) = \beta_1$. Segue que $\alpha_0 - G(\alpha_0) = \alpha_0 - \beta_0 \geq 0$ e $\alpha_1 - G(\alpha_1) = \alpha_1 - \beta_1 \leq 0$, portanto, segundo o **Teorema do Valor Intermediário**, a função $H: I \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = x - G(x)$ é igual a zero em algum ponto $p \in I$, como desejado. \square

Teorema 2.51. *Seja $F: J \rightarrow J$ uma função contínua. Suponha que existe um ponto $a \in J$ tal que*

$$F^3(a) \leq a < F(a) < F^2(a) \quad (\text{ou } F^3(a) \geq a > F(a) > F^2(a)).$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um ponto periódico em J de menor período k .

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$. Se $k > 1$, seja (I_n) uma sequência de intervalos compactos tais que $I_0 = \dots = I_{k-2} = [F(a), F^2(a)]$, $I_{k-1} = [a, F(a)]$ e $I_{n+k} = I_n$ para todo $n \geq 0$; se $k = 1$, seja $I_n = [F(a), F^2(a)]$ para todo $n \geq 0$.

É evidente que $I_n \subseteq J$; além do mais, $I_{n+1} \subseteq F(I_n)$ para todo $n \geq 0$: basta mostrar isso para todo $0 \leq n \leq k-1$, pois a sequência de intervalos é periódica.

Se $0 \leq n < k-2$, então $I_n = [F(a), F^2(a)]$ e aí $[F^3(a), F^2(a)] \subseteq F(I_n)$, segundo o **Teorema do Valor Intermediário**. Mas por hipótese, $F^3(a) < F(a) < F^2(a)$, logo $I_{n+1} = [F(a), F^2(a)] \subseteq [F^3(a), F^2(a)]$ e aí $I_{n+1} \subseteq F(I_n)$.

Se $n = k-2$, então $I_n = [F(a), F^2(a)]$ e $I_{n+1} = [a, F(a)] \subseteq [F^3(a), F^2(a)] = F(I_n)$; se $n = k-1$, então $I_n = [a, F(a)]$ e $I_{n+1} = [F(a), F^2(a)] \subseteq F(I_n)$ novamente segundo o **Teorema do Valor Intermediário**.

Portanto, vale o **Lema 2.49** e existe uma sequência (Q_n) de intervalos compactos satisfazendo $Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq [F(a), F^2(a)]$ e $F^n(Q_n) = I_n$ para todo $n \geq 0$. Em particular, $Q_k \subseteq [F(a), F^2(a)]$ e $F^k(Q_k) = I_k = [F(a), F^2(a)]$. Assim, se $G: Q_k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G(x) = F^k(x) \text{ para todo } x \in Q_k,$$

então chame $I = Q_k$ e veja que $I \subseteq G(I)$. Logo, vale o **Lema 2.50** e existe um ponto fixo $p_k \in Q_k$ para F^k . p_k é um ponto periódico de F de menor período k ; caso contrário, suponha que o menor período de p_k é $1 \leq k_0 < k$ ($k \geq 2$).

Chame $k - k_0 - 1 = m$ e veja que $0 \leq m \leq k-2$. Como $p_k \in Q_k \subseteq \dots \subseteq Q_m$, tem-se

$$F^{k-1}(p_k) = F^m(p_k) \subseteq F^m(Q_m) = I_m = [F(a), F^2(a)].$$

Por outro lado, segue de $Q_k \subseteq Q_{k-1}$ que $F^{k-1}(p_k) \in F^{k-1}(Q_{k-1}) = I_{k-1} = [a, F(a)]$. Então, $F^{k-1}(p_k) = F(a) \Rightarrow F^{k+1}(p_k) = F^3(a)$.

Entretanto, existem q natural e r inteiro não negativo tais que $k+1 = qk_0 + r$ e $0 \leq r < k_0$, de forma que $F^{k+1}(p_k) = F^r(p_k)$. Mas $r < k \leq k-1$, de forma que $F^r(p_k) \subseteq F^r(Q_k) \subseteq F^r(Q_r) = I_r = [F(a), F^2(a)]$, uma contradição, o que conclui a demonstração. \square

2.5.2 Teorema de Sarkovskii

No que segue, seja $f: I \rightarrow I$ uma função contínua e, dados reais distintos x e y , denote $[x: y]$ para o intervalo de extremidades x e y .

Lema 2.52. *Se $f^m(x_0) = x_0$, então o menor período de x_0 divide m .*

Demonstração. Seja n o menor período de x_0 . Logo, existem q, r inteiros não negativos tais que $m = qn + r$, com $0 \leq r < n$. Se $r > 0$,

$$f^m(x_0) = f^{qn+r}(x_0) = f^r(f^{qn}(x_0)) = f^r(x_0) = x_0,$$

uma contradição. Assim, $m = qn$, ou seja, n divide m . \square

Lema 2.53. *Sejam k, m e n inteiros positivos. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se x_0 é um ponto periódico de f de menor período m , então x_0 é um ponto periódico de f^n de menor período $m/(m, n)$, em que $(m, n) = \text{mdc}(m, n)$.*
2. *Se x_0 é um ponto periódico de f^n de menor período k , então x_0 é um ponto periódico de f de menor período kn/s , em que s é algum inteiro positivo tal que $s \mid n$ e $(k, s) = 1$.*

Demonstração. Para demonstrar 1, seja d o menor período de x_0 como ponto periódico de f^n . Veja que $(f^n)^{m/(m,n)}(x_0) = (f^m)^{n/(m,n)}(x_0) = x_0$, pois (m, n) divide m e n . Então, segue do **Lema 2.52** que d divide $m/(m, n)$. Por outro lado, $x_0 = (f^n)^d(x_0) = f^{dn}(x_0)$, de forma que o mesmo lema implica que $m \mid dn$. Logo, $m/(m, n) \mid d \cdot n/(m, n)$. Como $m/(m, n)$ e $n/(m, n)$ são coprimos, segue que $m/(m, n)$ divide d , e assim $d = m/(m, n)$.

Para demonstrar 2, observe que $x_0 = (f^n)^k(x_0) = f^{kn}(x_0)$. Dessa forma, o menor período de x_0 como ponto periódico de f é um divisor de kn , ou seja, existe um inteiro positivo s tal que kn/s é o menor período de x_0 . Segundo 1, tem-se que

$$k = \frac{kn/s}{(kn/s, n)} \Leftrightarrow \frac{kn}{s} = k \left(\frac{kn}{s}, n \right) \Leftrightarrow \frac{n}{s} = \left(\frac{n}{s} \cdot k, \frac{n}{s} \cdot s \right) = \frac{n}{s}(k, s),$$

isto é, s divide n e $(k, s) = 1$, como desejado. \square

Definição 2.54. *Sejam $J_0, J_1, \dots, J_{n-1}, J_n$ intervalos fechados contidos em I tais que $J_n = J_0$ e $J_{i+1} \subseteq f(J_i)$ para cada $0 \leq i \leq n-1$, então $J_0 J_1 \dots J_{n-1} J_0$ é dito um ciclo de comprimento n .*

Lema 2.55. *Se $J_0 J_1 \dots J_{n-1} J_0$ é um ciclo de comprimento n , então existe um ponto periódico y de f tal que $f^i(y) \in J_i$ para todo $0 \leq i \leq n-1$ e $f^n(y) = y$.*

Demonstração. Seja $Q_n = J_0$. Como $Q_n = J_0 \subseteq f(J_{n-1})$, existe, de acordo com o **Lema 2.48**, um subintervalo fechado Q_{n-1} de J_{n-1} tal que $f(Q_{n-1}) = Q_n = J_0$. Em geral, supondo que, para algum $1 \leq k \leq n-1$, Q_k está definido (isto é, $Q_k \subseteq J_k$ é um intervalo fechado tal que $f(Q_k) = Q_{k+1}$), construa Q_{k-1} de forma análoga: como $Q_k \subseteq J_k \subseteq f(J_{k-1})$, existe (mais uma vez usando o **Lema 2.48**) um subintervalo fechado Q_{k-1} de J_{k-1} tal que $f(Q_{k-1}) = Q_k$.

Assim, tem-se para cada $0 \leq i \leq n-1$ um subintervalo fechado Q_i de J_i tal que $f(Q_i) = Q_{i+1}$. Então, $f^i(Q_0) = Q_i$ para todo $0 \leq i \leq n-1$. Em particular, $Q_0 \subseteq J_0 = Q_n = f^n(Q_0)$, de forma que, segundo o **Lema 2.50**, existe $y \in Q_0$ tal que $f^n(y) = y$. Como $f^i(Q_0) = Q_i \subseteq J_i$, segue que $f^i(y) \in J_i$ para todo $0 \leq i \leq n-1$, como desejado. \square

Definição 2.56. *Seja P uma órbita de período m de f com $m \geq 3$ ímpar. Se existe um ponto $p \in P$ tal que*

$$f^{m-2}(p) < \dots < f^3(p) < f(p) < p = f^m(p) < f^2(p) < f^4(p) < \dots < f^{m-1}(p)$$

ou

$$f^{m-1}(p) < \dots < f^4(p) < f^2(p) < p = f^m(p) < f(p) < f^3(p) < \dots < f^{m-2}(p),$$

então P é chamado um ciclo de Štefan de f com menor período m .

Teorema 2.57. *Suponha que f possui um ponto de menor período m com $m \geq 3$. Então, f possui um ponto de menor período 2 e, se m é ímpar, então f possui um ponto de menor período $m + 2$, um de menor período 6 e um de menor período $2m$.*

Demonstração. Seja $P = \{x_1, \dots, x_m\}$, de forma que $x_1 < \dots < x_m$. Veja que $\{y \in P : f(y) > y\} \subseteq P$ é não vazio; caso contrário, $f(y) \leq y$ para todo $y \in P$, mas $f(y) \neq y$ para todo $y \in P$, visto que $m \geq 3$, de forma que $f(y) < y$ para todo $y \in P$. Assim, $x = f^m(x) = f(f^{m-1}(x)) < f^{m-1}(x) < \dots < f(x) < x$, uma contradição.

Logo, tome $1 \leq s \leq m$ satisfazendo $x_s = \max\{x \in P : f(x) > x\}$. Como $x_{s+1} > x_s$, é claro que $f(x_s) > x_s \Rightarrow f(x_s) \geq x_{s+1}$ e $x_{s+1} \notin \{x \in P : f(x) > x\}$, de forma que $f(x_{s+1}) < x_{s+1} \Rightarrow f(x_{s+1}) \leq x_s$. Segundo o **Teorema do Valor Intermediário**, $[x_s, x_{s+1}] \subseteq f([x_s, x_{s+1}])$, e aí o **Lema 2.50** implica que existe um ponto fixo de z de f em $[x_s, x_{s+1}]$ (evidentemente, $x_s < z < x_{s+1}$).

- I. Suponha que, para todo $1 \leq i \leq m - 1$, os pontos $f^i(x_s)$ e $f^{i+1}(x_s)$ estão em lados opostos de z . Então, $f([x_1, x_s] \cap P) \subseteq [x_{s+1}, x_m] \cap P$: se $1 \leq j < s$, existe $1 \leq k \leq m - 1$ tal que $f^k(x_s) = x_j$, logo, $f^{k+1}(x_s)$ deve estar do lado oposto de z , isto é, $f(x_j) \in [x_{s+1}, x_m] \cap P$. Quando $j = s$, $f(x_s) \geq x_{s+1}$, como já demonstrado. De forma completamente análoga, $f([x_{s+1}, x_m] \cap P) \subseteq [x_1, x_s] \cap P$.

Mas f é injetora em $[x_1, x_m] \cap P$, de forma que $f([x_1, x_s] \cap P) \subseteq [x_{s+1}, x_m] \cap P \Rightarrow |[x_1, x_s] \cap P| \leq |[x_{s+1}, x_m] \cap P|$; reciprocamente, $f([x_{s+1}, x_m] \cap P) \subseteq [x_1, x_s] \cap P \Rightarrow |[x_{s+1}, x_m] \cap P| \leq |[x_1, x_s] \cap P|$. Portanto, $s = m/2$ (m é par) e também $f([x_1, x_s] \cap P) = [x_{s+1}, x_m] \cap P$ e $f([x_{s+1}, x_m] \cap P) = [x_1, x_s] \cap P$. Mais uma vez usando o **Teorema do Valor Intermediário**, é certo que $[x_1, x_s] \subseteq f([x_{s+1}, x_m])$ e $[x_{s+1}, x_m] \subseteq f([x_1, x_s])$.

Se $n = 2$, $J_0 = [x_1, x_s]$, $J_1 = [x_{s+1}, x_m]$ e $J_2 = [x_1, x_s]$, segue que $J_2 \subseteq f(J_1)$ e $J_1 \subseteq f(J_0)$, assim $J_0 J_1 J_2$ é um ciclo de comprimento 2. Segundo o **Lema 2.55**, existe $y \in [x_1, x_s]$ tal que $y = f^2(y) \in [x_1, x_s]$ e $f(y) \in [x_{s+1}, x_m]$, de forma que $f(y) \neq y$. Logo, y é um ponto periódico de f de menor período 2.

II. Caso contrário, o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq m - 1, f^n(x_s) \text{ e } f^{n+1}(x_s) \text{ estão do mesmo lado de } z\}$$

é não vazio: possui um menor elemento r . Suponha que $f^r(x_s)$ está à esquerda de z . Como $f(x_s) \geq x_{s+1}$, tem-se que $2 \leq r \leq m-1$. Como x_s e $f(x_s)$ estão em lados opostos de z , $f^r(x_s) \neq x_s$; da mesma forma, $f^r(x_s) \neq x_{s+1}$. Assim, para cada $0 \leq i \leq r-1$, faça $J_i = [z : f^i(x_s)]$ e defina

$$J_r = \begin{cases} [f^r(x_s), x_s], & \text{se } f^r(x_s) < x_s, \\ [x_{s+1}, f^r(x_s)], & \text{se } x_{s+1} < f^r(x_s). \end{cases}$$

Dado um inteiro ímpar $k > m$, defina também $J_i = [x_s, x_{s+1}]$ para cada $r+1 \leq i \leq k-1$ e $J_k = J_0$. Naturalmente, $[z : f^{i+1}(x_s)] \subseteq f([z : f^i(x_s)]) \Leftrightarrow J_{i+1} \subseteq f(J_i)$ para todo $0 \leq i \leq r-2$, pois $f(z) = z$ e $f(f^i(x_s)) = f^{i+1}(x_s)$.

Da mesma forma, $J_r \subseteq f(J_{r-1})$ e $J_{r+1} \subseteq f(J_r)$: se $f^r(x_s) < x_s$, $J_r = [f^r(x_s), x_s]$. Aí, $[f^r(x_s), x_s] \subseteq [f^r(x_s), z] \subseteq f([z : f^{r-1}(x_s)])$; também vale que $[x_s, x_{s+1}] \subseteq f([f^r(x_s), x_s])$, pois $f(x_s) \geq x_{s+1}$ e $f^{r+1}(x_s)$ está à esquerda de z , e aí $f^{r+1}(x_s) \leq x_s$.

Caso contrário, $f^r(x_s) > x_{s+1}$, e então $J_r = [x_{s+1}, f^r(x_s)]$. Logo, $[x_{s+1}, f^r(x_s)] \subseteq [z, f^r(x_s)] \subseteq f([z : f^{r-1}(x_s)])$; também $[x_s, x_{s+1}] \subseteq f([x_{s+1}, f^r(x_s)])$, porque $f(x_{s+1}) \leq x_s$ e $f^{r+1}(x_s)$ está à direita de z , e aí $f^{r+1}(x_s) \geq x_{s+1}$.

Por fim, $[x_s, z] \subseteq [x_s, x_{s+1}] \subseteq f([x_s, x_{s+1}])$, como já demonstrado acima. Assim, $J_0 J_1 \dots J_k$ é ciclo de comprimento k . Conforme o **Lema 2.55**, existe $y \in [x_s, z]$ tal que $f^k(y) = y$ e $f^i(y) \in J_i$ para todo $1 \leq i \leq k-1$. Como $J_r \cap J_0 \subseteq \{x_s\}$, se $f^r(y) = y$, então $y = x_s$, uma contradição, pois o menor período de x_s é $m \geq r+1$. Assim, $f^r(y) \neq y$, de forma que $f(y) \neq y$. O **Lema 2.52** garante que y possui ordem $l > 1$ que divide k , de forma que l é ímpar.

Desenvolvimento completamente análogo segue se $f^r(x_s)$ estiver à direita de z .

Assim, basta assumir que $m \geq 3$ é ímpar para demonstrar o resto do teorema. De fato, se m for par, vale I (e aí a primeira afirmação está demonstrada) ou II, e aí existe ponto periódico de f de menor período ímpar $l \geq 3$ segundo II.

No que segue, será mostrado que se $m \geq 3$ é ímpar e não existem pontos periódicos de f de menor período ímpar l tal que $1 < l < m$, então P é um ciclo de Štefan, f possui pontos periódicos de todos os períodos pares e pontos periódicos de todos os períodos maiores que m . Se $m = 3$, então o resultado segue de **Teorema 2.51**.

Suponha então que $m > 3$ e que não há pontos periódicos de menor período ímpar $1 < l < m$. Sejam J_0, \dots, J_r como em II. Se $1 \leq r \leq m-3$, construa $J_{r+1}, \dots, J_{m-3} = [x_s, x_{s+1}]$, $J_{m-2} = J_0$. É evidente que $J_0 \dots J_{m-2}$ é um ciclo de comprimento de $m-2$ (a demonstração é análoga à demonstração em II), logo, segundo o **Lema 2.55**, existe ponto periódico de menor período l , um ímpar que divide $m-2$, isto é, $1 < l < m$, um absurdo.

Portanto, $r \geq m-2$, de forma que os pontos $f^k(x_s)$, $f^{k+1}(x_s)$ estão em lados opostos de z para todo $1 \leq k \leq m-3$. Segue que, para todo par $0 \leq i \leq m-3$ e para todo

ímpar $1 \leq j \leq m - 2$, $f^i(x_s) < z < f^j(x_s)$. Em particular, $z < f^{m-2}(x_s)$. Há quatro casos a considerar dependendo de onde está $f^{m-1}(x_s)$:

1. $f^{m-1}(x_s) < z < f^{m-2}(x_s)$. Em outras palavras, $f^i(x_s) < z < f^j(x_s)$ para todo par $0 \leq i \leq m - 1$ e para todo ímpar $1 \leq j \leq m - 2$.

Então, a órbita de x_s é um ciclo de Štefan. Caso contrário, existem pares $0 \leq j < k \leq m - 1$ tais que $f^j(x_s) < f^k(x_s)$ ou ímpares $1 \leq j < k \leq m - 2$ tais que $f^j(x_s) > f^k(x_s)$. Em outras palavras, existem $0 \leq j < k \leq m - 1$ tais que $k - j$ é par e $[z : f^k(x_s)] \subseteq [z : f^j(x_s)]$. Assim, para cada $0 \leq i \leq m - 2$, faça $J_i = [z : f^i(x_s)]$.

Se $k < m - 1$, considere o ciclo $J_0 J_1 \cdots J_{j-1} J_k J_{k+1} \cdots J_{m-2} [f^{m-1}(x_s), x_s] J_0$: as continências $J_{i+1} \subseteq f(J_i)$ já foram demonstradas quando $0 \leq i \leq m - 2$, aí $J_k = [z : f^k(x_s)] \subseteq [z : f^j(x_s)] = J_j \subseteq f(J_{j-1})$. Além disso, como $x_s < z$ e $f(x_s) > z$, $[f^{m-1}(x_s), x_s] \subseteq [f^{m-1}(x_s), z] \subseteq f(J_{m-2})$ e $J_0 = [x_s, z] \subseteq [x_s, f(x_s)]$.

Se $k = m - 1$, considere o ciclo $J_0 J_1 \cdots J_{j-1} [f^{m-1}(x_s), x_s] J_0$: como dito acima, $J_{i+1} \subseteq f(J_i)$ quando $0 \leq i \leq m - 2$, aí, usando que j é par nesse caso e que $x_s < z$, $[f^{m-1}(x_s), x_s] = [f^k(x_s), x_s] \subseteq [f^k(x_s), z] \subseteq [f^j(x_s), z] \subseteq f(J_{j-1})$.

Em ambos os casos, tem-se um ciclo de comprimento $m + j - k$. Como $k - j$ é par e m é ímpar, $m + j - k$ é ímpar. Segue do **Lema 2.55** que existe ponto periódico $y \in [x_s, z]$ cujo período divide $m + j - k$. Note que $f^{m-j+k-1}(y) \in [f^{m-1}(x_s), x_s]$; se $f(y) = y$, segue que $y = x_s$, o que é impossível. Assim, o menor período de y é um ímpar maior que 1 e menor que m , um absurdo. Portanto,

$$f^{m-1}(x_s) < \cdots < f^4(x_s) < f^2(x_s) < x_s < f(x_s) < f^3(x_s) < \cdots < f^{m-2}(x_s).$$

Defina $U = [f^{m-1}(x_s), f^{m-3}(x_s)]$, $V = [f^{m-3}(x_s), z]$ e $W = [z, f^{m-2}(x_s)]$. Para todo $i \geq 0$, considere o ciclo

$$U(WV)^i WU = U \underbrace{(WV) \cdots (WV)}_{i \text{ vezes}} WU.$$

De fato, $[z, f^{m-2}(x_s)] \subseteq [x_s, f^{m-2}(x_s)] \subseteq f([f^{m-1}(x_s), f^{m-3}(x_s)]) \Rightarrow W \subseteq f(U)$; $[f^{m-3}(x_s), z] \subseteq [f^{m-1}(x_s), z] \subseteq f([z, f^{m-2}(x_s)]) \Rightarrow V \subseteq f(W)$. Além disso, $[z, f^{m-2}(x_s)] \subseteq f([f^{m-3}(x_s), z]) \Rightarrow W \subseteq f(V)$; da mesma forma, segue que $[f^{m-1}(x_s), f^{m-3}(x_s)] \subseteq [f^{m-1}(x_s), z] \subseteq f([z, f^{m-2}(x_s)]) \Rightarrow U \subseteq f(W)$.

Seu comprimento é $2(i + 1)$. Pelo **Lema 2.55**, existe ponto periódico $y \in [f^{m-1}(x_s), f^{m-3}(x_s)]$ tal que $f^{2(i+1)}(y) = y$ e, para todo ímpar $1 \leq j \leq 2i + 1$, $f^j(y) \in W$ e, para todo par $0 \leq k \leq 2i$, $f^k(y) \in V$. De acordo com o **Lema 2.52**, o período de y é par.

Observe que $U \cap V = \{f^{m-3}(x_s)\}$: se $f^j(y) = y$, para algum j tal qual acima, então $y = f^{m-3}(x_s)$. Mas o período de $f^{m-3}(x_s)$ divide o período de x_s , que é ímpar, um absurdo; além disso, $U \cap W = \emptyset$, de forma que $f^k(y) \neq y$ para todo

k como acima. Isso implica que o menor período de y é $2(i + 1)$. Variando y , é possível obter pontos periódicos de f com qualquer período par.

Por outro lado, para cada inteiro ímpar $n > m$, considere o ciclo

$$U([x_s, x_{s+1}])^{n-m} J_0 J_1 J_2 \cdots J_{m-2} U.$$

De fato, $[x_s, x_{s+1}] \subseteq [x_s, f^{m-2}(x_s)] \subseteq f([f^{m-1}(x_s), f^{m-3}(x_s)])$, o que implica que $[x_s, x_{s+1}] \subseteq f(U)$; $[f^{m-1}(x_s), f^{m-3}(x_s)] \subseteq [f^{m-1}(x_s), z] \subseteq f([z, f^{m-2}(x_s)]) \Rightarrow U \subseteq f(J_{m-2})$. Além disso, tem-se que $J_{i+1} \subseteq f(J_i)$ para todo $0 \leq i \leq m-3$, $[x_s, x_{s+1}] \subseteq f([x_s, x_{s+1}])$ e $J_0 \subseteq f([x_s, x_{s+1}])$, como já demonstrado.

Aí, tome o ponto periódico y tal que $f^n(y) = y$ (aí, o menor período de n é algum ímpar divisor de n) cuja existência é, mais uma vez, garantida pelo **Lema 2.55**. Como $U \cap [x_s, x_{s+1}] = U \cap J_0 = \cdots = U \cap J_{m-2} = \emptyset$ e $U \cap J_{m-3} = \{f^{m-3}(x_s)\}$, y tem menor período n : caso contrário, a única opção é que $f^{m-3}(x_s) = y$, mas $m-3$ é par, de forma que o período de y deve ser par, uma contradição. Assim, $f^i(y) \neq y$ para todo $1 \leq i \leq n-1$, como desejado.

2. $f^{m-2}(x_s) < f^{m-1}(x_s)$. Segue que $x_{s+1} < f^{m-2}(x_s) < f^{m-1}(x_s)$, pois caso $x_{s+1} = f^{m-2}(x_s)$, então $f(x_{s+1}) = f^{m-1}(x_s) > x_s$, uma contradição.

Nesse caso, observe que $[x_{s+1}, f^{m-2}(x_s)] \subseteq [x_s, f^{m-1}(x_s)] \subseteq f([x_{s+1}, f^{m-2}(x_s)])$. Logo, o **Lema 2.50** garante que existe $\hat{z} \in [x_{s+1}, f^{m-2}(x_s)]$, um ponto fixo de f . Agora tome o ciclo

$$[\hat{z}, f^{m-2}(x_s)]([f^{m-2}(x_s), f^{m-1}(x_s)])^2[\hat{z}, f^{m-2}(x_s)].$$

Certamente, vale que $[f^{m-2}(x_s), f^{m-1}(x_s)] \subseteq [\hat{z}, f^{m-1}(x_s)] \subseteq f([\hat{z}, f^{m-2}(x_s)])$ e $[\hat{z}, f^{m-2}(x_s)] \subseteq [x_s, f^{m-1}(x_s)] \subseteq f([f^{m-2}(x_s), f^{m-1}(x_s)])$. Além disso, tem-se $[f^{m-2}(x_s), f^{m-1}(x_s)] \subseteq [x_s, f^{m-1}(x_s)] \subseteq f([f^{m-2}(x_s), f^{m-1}(x_s)])$.

Aí, tome $y \in [\hat{z}, f^{m-2}(x_s)]$ tal que $f^3(y) = y$ e $f(y), f^2(y) \in [f^{m-2}(x_s), f^{m-1}(x_s)]$. Caso 3 não seja o menor período de y , então $f(y) = y$ ou $f^2(y) = y$. De qualquer forma, segue que $y = f^{m-2}(x_s)$, uma contradição, pois o período de $f^{m-2}(x_s)$ é maior que 1 e divide o ímpar m , assim, não pode ser igual a 1 ou a 2. Mas isso contradiz a hipótese de que não há pontos periódicos de menor período ímpar e menor do que m .

3. $x_{s+1} < f^{m-1}(x_s) < f^{m-2}(x_s)$.

Aí, $x_{s+1} = f^k(x_s)$ para algum $1 \leq k \leq m-3$. Tome o ciclo

$$[z, f^k(x_s)] \cdots [z : f^{m-3}(x_s)][f^{m-1}(x_s), f^{m-2}(x_s)]([x_s, x_{s+1}])^{k-1}[z, f^k(x_s)].$$

Claro que $[f^{m-1}(x_s), f^{m-2}(x_s)] \subseteq [z, f^{m-2}(x_s)] \subseteq f([z : f^{m-3}(x_s)])$ e $[x_s, x_{s+1}] \subseteq [x_s, f^{m-1}(x_s)] \subseteq f([f^{m-1}(x_s), f^{m-2}(x_s)])$, além disso, $[z, f^k(x_s)] = [z, x_{s+1}] \subseteq [x_s, x_{s+1}] \subseteq f([x_s, x_{s+1}])$. As outras continências já foram demonstradas.

Evidentemente, o comprimento de tal ciclo é $m - 2$; além disso, $[z, f^k(x_s)] \cap [f^{m-1}(x_s), f^{m-2}(x_s)] = \emptyset$. Aí, o ponto periódico y que satisfaz $f^{m-2}(y) = y$ (e possui, portanto, menor período um divisor de $m - 2$) não é um ponto fixo, o que contradiz a hipótese de que não há pontos periódicos de período ímpar menor do que m .

$$4. x_{s+1} = f^{m-1}(x_s) < f^{m-2}(x_s).$$

Dessa forma,

$$f^i(x_s) < z < x_{s+1} = f^{m-1}(x_s) < f^j(x_s)$$

para todo par $0 \leq i \leq m - 3$ e para todo ímpar $1 \leq j \leq m - 2$. Como $f(x_{s+1}) = f^m(x_s) = x_s$, basta substituir na desigualdade acima para obter

$$f^j(x_{s+1}) < z < f^i(x_{s+1})$$

para todo par $0 \leq i \leq m - 1$ e para todo ímpar $1 \leq j \leq m - 2$, uma cópia simétrica do caso número 1.

Isso mostra que P é um ciclo de Štefan e que f possui pontos periódicos de todos os períodos pares e de todos os períodos maiores que m .

Agora suponha que f possui um ponto periódico de período ímpar $n \geq 3$. Então, existe um menor ímpar $1 < m \leq n$ tal que existe um ponto periódico de f de menor período m (isto é, não existem pontos periódicos de f de período l , para qualquer $1 < l \leq m$ ímpar). A órbita relativa a esse ponto periódico é uma órbita de Štefan e o resultado segue da conclusão descrita no parágrafo acima. \square

Teorema 2.58. *Considere a ordenação de Sarkovskii dos naturais:*

$$\begin{array}{cccccccccccc} 3 & \prec & 5 & \prec & 7 & \prec & 9 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^0 & \prec & \dots \\ \prec & 3 \cdot 2 & \prec & 5 \cdot 2 & \prec & 7 \cdot 2 & \prec & 9 \cdot 2 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^1 & \prec & \dots \\ \prec & 3 \cdot 2^2 & \prec & 5 \cdot 2^2 & \prec & 7 \cdot 2^2 & \prec & 9 \cdot 2^2 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^2 & \prec & \dots \\ \prec & 3 \cdot 2^3 & \prec & 5 \cdot 2^3 & \prec & 7 \cdot 2^3 & \prec & 9 \cdot 2^3 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^3 & \prec & \dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \prec & \dots & \prec & 2^n & \prec & \dots & \prec & 2^3 & \prec & 2^2 & \prec & 2 & \prec & 1 \end{array}$$

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f possui um ponto periódico de período fundamental n e $n \prec k$ na ordenação de Sarkovskii, então f possui um ponto periódico de período fundamental k .

Demonstração. Nessa demonstração, a expressão “período fundamental” será abreviada simplesmente para “período” para evitar repetições.

Se f possui um ponto periódico de período ímpar $m \geq 3$, então f possui um ponto de período $m + 2$, segundo o **Teorema 2.57**. Aplicando indutivamente esse resultado,

f possui pontos de todos os períodos ímpares maiores ou iguais a m . Isso justifica a ordenação da primeira linha. Além disso, o teorema acima implica que f possui ponto de período $3 \cdot 2$: basta observar agora as próximas linhas.

Passando para a segunda linha, suponha que f possui ponto de período $m \cdot 2$ para algum ímpar $m \geq 3$ (isto é, tome um elemento qualquer na segunda linha). Segundo o **Lema 2.53**, f^2 possui ponto de período m (de fato, o período desse ponto enquanto ponto periódico de f^2 é $2m/(2m, 2) = 2m/2 = m$).

De acordo com o teorema anterior, f^2 possui ponto de período $m + 2$, de forma que, segundo o **Lema 2.53** novamente, esse ponto deve possuir período $2(m + 2)/s$ para algum divisor s de 2 enquanto ponto periódico de f , ou seja, um ponto de período $(m + 2)$ ou $(m + 2) \cdot 2$. Se f possui um ponto de período $m + 2$, então f possui um ponto de período $(m + 2) \cdot 2$ segundo o **Teorema 2.57**, de forma que f possui, de qualquer forma, ponto de período $(m + 2) \cdot 2$. Esse raciocínio, aplicado indutivamente, justifica a ordenação da segunda linha. Veja também que como f^2 possui ponto de período m , então possui ponto de período $3 \cdot 2$. Usando o mesmo lema, tem-se que f possui ponto de período $6 \cdot 2/s$, em que s divide 2 e $(s, 6) = 1$, logo $s = 1$ e f possui ponto de período $3 \cdot 2^2$: isso permite progredir à próxima linha.

O raciocínio segue de forma análoga. Suponha que f possui um ponto de período $m \cdot 2^k$ para algum $m \geq 3$ ímpar e $k \geq 2$. Conforme o **Lema 2.53**, $f^{2^{k-1}}$ possui ponto de período $m \cdot 2^k / (m \cdot 2^k, 2^{k-1}) = m \cdot 2$. Segue do parágrafo anterior que $f^{2^{k-1}}$ possui ponto de período $(m + 2) \cdot 2$ e ponto de período $3 \cdot 2^2$. Retornando para f usando o lema mais uma vez, f possui ponto de período $2(m + 2) \cdot 2^{k-1}/s$, em que $(s, 2m) = 1$ e s divide 2^{k-1} , isto é, $s = 1$ e f possui ponto de período $(m + 2) \cdot 2^k$; além disso, f possui ponto de período $3 \cdot 2^2 \cdot 2^{k-1}/s$, em que $(s, 3 \cdot 2^2) = 1$ e s divide 2^{k-1} , o que implica que $s = 1$ e f possui ponto de período $2^{k+1} \cdot 3$. Esse argumento justifica todas as outras linhas, com a exceção da última.

Para a última linha da ordenação de Sarkovskii, suponha que f possui ponto de período $m \cdot 2^i$ para algum $m \geq 3$ ímpar e $i \geq 0$. Então, f^{2^i} possui ponto de período $m \cdot 2^i / (m \cdot 2^i, 2^i) = m$. Logo, para cada $l \geq i$, $f^{2^l} = (f^{2^i})^{2^{l-i}}$ possui ponto de período $m / (m, 2^{l-i}) = m$. Segundo o **Teorema 2.57**, f^{2^l} possui ponto de período $3 \cdot 2$, de forma que $f^{2^{l+1}} = (f^{2^l})^2$ possui ponto de período $6 / (6, 2) = 3$ e, como já demonstrado, isso implica que $f^{2^{l+1}}$ possui ponto de período 2. Portanto, f possui ponto de período $2 \cdot 2^{l+1}/s$, em que $s \mid 2^{l+1}$ e $(s, 2) = 1$, de forma que $s = 1$ e f possui ponto de período 2^{l+2} , qualquer que seja $l \geq i$. Isso formaliza o fato de que todas as potências de 2 devem estar na última linha da ordenação.

Por fim, suponha que f possui ponto de período 2^k para algum $k \geq 2$. Logo $f^{2^{k-2}}$ possui ponto de período $2^k / (2^k, 2^{k-2}) = 4$. Segundo o teorema anterior, $f^{2^{k-2}}$ possui ponto de período 2 e, voltando, f possui ponto de período $2 \cdot 2^{k-2}/s$, com $s \mid 2^{k-2}$ e $(s, 2) = 1$, o que implica que $s = 1$ e f possui ponto de período 2^{k-1} , o que justifica a última linha, completando a demonstração. \square

Referências

- [1] John Banks, Jeffrey Brooks, Grant Cairns, Gary Davis, and Peter Stacey. On devaney's definition of chaos. *The American mathematical monthly*, 99(4):332–334, 1992.
- [2] Luis Barreira and Claudia Valls. *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*, volume 137. American Mathematical Soc., 2012.
- [3] Nedim Değirmenci and Şahin Koçak. Existence of a dense orbit and topological transitivity: when are they equivalent? *Acta Mathematica Hungarica*, 99(3):185–187, 2003.
- [4] RL Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Westview Press, 1992.
- [5] Bau-Sen Du. A collection of simple proofs of sharkovsky's theorem. *arXiv preprint math/0703592*, 2007.
- [6] gernot. Drawing the trace determinant diagram, 2017. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/a/347401/253698>>. Acesso em: 4 de outubro de 2021.
- [7] Yuri A Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] Tien-Yien Li and James A. Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975.
- [9] Tom L Lindstrøm. *Spaces: An introduction to real analysis*, volume 29. American Mathematical Soc., 2017.
- [10] Aloisio F Neves. Notas de aula: Forma de jordan e equações diferenciais lineares. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~aloisio/documentos/jordan.pdf>>. Acesso em: 27 de agosto de 2021.
- [11] L Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [12] Pedro M Rodrigues. Notes on ordinary differential equations – vi. Disponível em: <<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~pmartins/EDO/NotasED06.pdf>>. Acesso em: 16 de dezembro de 2021.
- [13] Pedro M Rodrigues. Notes on ordinary differential equations – vii. Disponível em: <<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~pmartins/EDO/NotasED07.pdf>>. Acesso em: 21 de janeiro de 2022.
- [14] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [15] PR Wolenski. The cantor middle-thirds set. discrete dynamical systems –

math 2030, fall 2012. Disponível em: <<https://www.math.lsu.edu/~wolenski/Fall2012/06CantorSet.pdf>>.