Dinâmica Hiperbólica: Uma introdução

Prof. RÉGIS VARÃO
IMECC-Unicamp
www.ime.unicamp.br/∼regisvarao

April 22, 2015

Contents

Chapter 1

Primeiro contato

1.1 Anosov linear em $\mathbb{T}^2$

Considere uma matriz $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ com autovalores λ^s e λ^u de norma menor que um e maior que um respectivamente.

Exemplo 1.1.1. Um exemplo explícito para A acima é a matriz seria $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, também conhecido como "cat map". Seus autovalores são $\lambda^s = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, e $\lambda^u = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 1$.

Como $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ então $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, então A induz um automorfismo em $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ que chamaremos também de A.

Proposição 1.1.1. *Os pontos periódicos de $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ são densos em $\mathbb{T}^2$*

Proof. Seja $k \in \mathbb{N}$

$$P_k := \{ \left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k} \right) \mid 0 \leq \alpha, \beta < k, \ \alpha, \beta \in \mathbb{N} \}$$

Note que $A(P_k) \subset P_k$ uma vez que A tem entradas inteiras. E portanto $A(P_k) = P_k$, basta ver a quantidade de pontos que tem em cada conjunto. Logo A apenas permuta os elementos de P_k, assim todo elemento de P_k é um ponto periódico para A.

Note que o conjunto $\cup_k P_k$ forma um conjunto denso em $\mathbb{T}^2$, logo os pontos periódicos são densos em $\mathbb{T}^2$. □

Considere a projeção:

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$$

Chamemos de l_s e l_u as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$ e que são os auto espaços associados aos autovalores com norma menor que 1 e maior que

1 respectivamente. Agora definamos a variedade estável do ponto $[0,0] \in \mathbb{T}^2$ como sendo $W^s[0,0] = \pi(l_s)$, analogamente $W^u[0,0] = \pi(l_u)$ é a variedade instável. Seja $l_s(x,y)$ a reta que passa pelo ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e paralela a l_s, então a variedade estável do ponto $\pi((x,y)) = [x,y]$ é $W^s([x,y]) = \pi(l_s(x,y))$. Analogamente definimos a variedade instável.

Teorema 1.1.2.
- *Seja $W^s([x,y])$ a variedade estável de A que passa pelo ponto $[x,y]$. Então se $[x',y'] \in W^s[x,y]$ então*

$$d(A^n[x,y], A^n[x',y']) \to 0$$

- *Para a variedade instável vale*

$$d(A^{-n}[x,y], A^{-n}[x',y']) \to 0$$

Proof. Note que (x,y) e (x',y') estão numa mesma reta que é paralela a l_s. Seja r a reta que liga (x,y) e $(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Lote que o comprimento de $A^n(r)$ é igual a $(\lambda_s)^n l(r)$ onde $l(r)$ é o comprimento da reta r. Logo como $(\lambda_s)^n l(r)$ tende a zero quando n vai a infinito, temos o resultado.

Analogamente fazemos para a variedade instável. □

Teorema 1.1.3. *As variedade estáveis e instáveis de A são densas em $\mathbb{T}^2$.*

Proof. Provaremos apenas que a variedade estável da origem é densa. Os outros casos são análogos.

Vejamos que a reta $W^s(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ tem inclinação irracional, caso contrário existiria um ponto $(N,M) \in \mathbb{R}^2$ com entradas inteiras. Mas note que $A^n(N,M)$ tende a origem, mas como A tem entradas inteiras isto dá um absurdo.

Agora consideremos as interseções de $W^s(0,0)$ com as retas $y = N$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e seja x_N a coordenada x tal que $(x_N, N) \in \mathbb{R}^2$. Note que $N/X_N = \alpha$ onde α é a inclinação da reta $W^s(0,0)$. Assim $x_N = N\alpha^{-1}$. Esses pontos projetam a ponto da forma $[x_n, 0]$ no toro. Isso significa que temos uma translação irracional no círculo $y = 0$ logo denso neste círculo.

□

Definição 1.1.4. Dizemos que $[x,y] \in \mathbb{T}^2$ é um ponto homoclínico para A se $[x,y] \in W^s[x_0,y_0] \cap W^u[x_0,y_0]$ e $[x_0,y_0]$ é um ponto periódico para A.

Proposição 1.1.2. *Os pontos homoclínicos de A são densos em $\mathbb{T}^2$*

Proof. Isto segue do fato que as variedades estáveis e instáveis são densas e possuem inclinações distintas. □

Definição 1.1.5 (Topologicamente transitivo)**.** Seja $f : X \to X$ contínua num espaço topológico, dizemos que f é topologicamente transitiva se dados dois abertos quaisquer $U, V \subset X$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$

Definição 1.1.6 (Topologicamente misturadora)**.** Seja $f : X \to X$ contínua num espaço topológico, dizemos que f é topologicamente misturadora se dados dois abertos quaisquer $U, V \subset X$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

Em um espaço topológico de Baire, topologicamente transitivo implica a existência de um residual tal que todo ponto tem órbita densa em X.

Proposição 1.1.3. *Seja $f : X \to X$ contínua num espaço de Baire e topologicamente transitiva. Então existe um conjunto residual, $\mathcal{R}$, tal que se $x \in \mathcal{R}$ então $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é densa em X.*

Proof. Seja $\{V_i\}$ uma base enumerável da topologia. Por hipótese $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(V_i)$ é aberto e denso. Portanto

$$Y = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(V_i)$$

é um residual. Se $y \in Y$, dado qualquer aberto U tome $V_{i_0} \subset U$. Existe n_0 tal que $f^{n_0}(y) \in V_{i_0} \subset U$. Conclui-se que $\mathcal{O}(y)$ é denso.

□

Teorema 1.1.7. *$A \in SL(2, \mathbb{Z})$ hiperbólica é topologicamente misturadora;*

Proof. Sejam U e V abertos. Tomemos $I^s \subset U$ e $I^u \subset V$ intervalos de variedade estável e instável da origem, respectivamente. Note que $A^{-n}(I^s)$ e $A^n(I^u)$ são curvas arbitrariamente longas contidas nas variedades estável e instável da origem. Como estamos em $\mathbb{T}^2$ e estas curvas possuem inclinações constantes e transversais elas devem se intersectar para qualquer n suficientemente grande. □

1.2 Lema de sombreamento em $\mathbb{T}^2$

Continuemos com o nosso exemplo, isto é $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ com $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ hiperbólica.

Teorema 1.2.1 (Lema de sombreamento)**.** *Dado $\varepsilon > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $x \in \mathbb{T}^2$ é tal que $d(A^n(x), x) < \delta$ para um certo $n \in \mathbb{N}$, então existe um ponto periódico $y \in \mathbb{T}^2$ com $A^n(y) = y$ e tal que $d(A^i(x), A^i(y)) < \varepsilon$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.*

Proof. Considere coordenadas em $\mathbb{R}^2$ dadas pelos auto espaço estável e instável.

Defina a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ n-periódica da seguinte forma

$$\{\ldots, x_{-1} = A^{n-1}(x), x_0 = x, x_1 = A(x), \ldots, x_{n-1} = A^{n-1}(x), x_n = x, \ldots\} \tag{1.1}$$

Seja $Q(z)$ o quadrado de lados de tamanho ε centrado em $z \in \mathbb{T}^2$. Note que o conjunto $Q(x) \cap A^{-1}(Q(A(x)))$ é um retângulo contendo $\{y = 0\} \cap Q(x)$. O próximo passo também temos $Q(x) \cap A^{-1}(Q(A(x))) \cap A^{-2}(Q(A^2(x)))$ um retângulo, agora mais fino e estritamente contido em $Q(x) \cap A^{-1}(Q(A(x)))$. Definamos

$$H_k = \bigcap_{i=0}^{k} A^{-i} Q(A^i)$$

Note que $H_{k+1} \subset H_k$ e sua altura decresce exponencialmente, a taxa λ^s. Agora faremos a seguinte boa escolha de δ. Delta é pequeno o suficiente de forma que $A^{-n}(Q(A^n(x))) \cap \{x = 0\} \subsetneq Q(x) \cap \{x = 0\}$. Analogamente para a direção vertical, com isso fica bem definido os conjuntos:

$$H = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Q(x_i)$$

$$V = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Q(x_{-i})$$

Note que $H \cap V$ é um único ponto, definamos $y := H \cap V$. Ou seja, temos de fato a afirmação:

Afirmação: y é o único ponto tal que $d(x_k, A^k(y)) < \varepsilon \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Agora considere o ponto $z := A^n(y)$. Usando que x_k é n-períodica,

$$d(A^k(z), x_k) = d(A^k(A^n(y)), x_k) = d(A^{k+n}(y)), x_{k+n}).$$

Usando a afirmação temos que $d(A^k(z), x_k) \leq \varepsilon$ e usando a unicidade dada pela afirmação temos que $A^n(y) = y$. Portanto y é periódico.

□

1.2.1 Matriz hiperbólica em $\mathbb{R}^n$

Proposição 1.2.1. *Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ automorfismo linear hiperbólico. Seja $\tau \in (0,1)$ tal que todo autovalor de norma menor que um τ e maior que um seja maior que τ^{-1}. Então existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ e uma nova norma $||.||$ em $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\begin{aligned} L(V_1) = V_1 \quad &e \quad ||L|V_1|| < \tau \\ L(V_2) = V_2 \quad &e \quad ||L^{-1}|V_2|| < \tau \end{aligned}$$

Proof. A prova seguirá do próximo lema.

Lema 1.2.1. *Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear tal que todos os autovalores tenham norma menores que um. Seja $\tau_1 = sup\{|\lambda| : \lambda$ é autovalor de $L\}$,tome $\tau \in (\tau_1, 1)$. Então existe uma nova norma $||.||$ em $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$||L(v)|| \leq \tau ||v||, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, a norma $|||.|||$ de L como operador é menor que τ, isto é

$$|||L||| := \sup_{x\neq 0}\{\frac{||L(x)||}{||x||}\} < \tau.$$

Proof. Considere $L = S + N$ na decomposição em forma de Jordan sendo S semi-simples e N nilpotente. Existe $C > 0$ tal que para todo $m \geq 0$ tem-se $|L^m v| \leq C(\tau^m)|v|, \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Assim a quantidade $\alpha(v) = sup(\{|L^m v|\tau^{-m} : m \geq 0\})$ é finito.

Seja $l \in \mathbb{N}$ tal que $N^l = 0$.

$$\begin{aligned}
|L^m| = |(S+N)^m| &= |\sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} S^{m-k}N^k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{l} m^l \; |S^{m-k}| \; |N^k| \\
&\leq C\sum_{k=0}^{l} m^l \; \tau_1^{m-k} \\
&\leq Clm^l\tau_1^{m-l} \\
&\leq \tilde{C}m^l\tau_1^m
\end{aligned}$$

Agora note que

$$m^l\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^m \to 0, \text{ quando } m \to \infty$$

Defina $||v|| = \alpha(v)$. Note que $||.||$ é uma norma (i.e. $\alpha(av) = a\alpha(v), \alpha(v+w) \leq \alpha(v) \leq \alpha(w), \alpha(v) = 0$ sse $v = 0$) e

$$\begin{aligned}
||Lv|| &= sup(|L^m Lv|\tau^{-m} : m \geq 0) \\
&= \tau\tau^{-1}sup(\{|L^m Lv|\tau^{-m} : m \geq 0\}) \\
&= \tau sup(\{|L^m Lv|\tau^{-m-1} : m \geq 0\}) \\
&= \tau sup(\{|L^m v|\tau^{-m} : m \geq 1\}) \\
&= \tau||v||.
\end{aligned}$$

□

Agora basta separar nos autoespaços gerados pelos autovetores de norma menor que τ e maior que τ^{-1}. □

Exercício 1.2.1. Os pontos periódicos de um automorfismo linear hiperbólico no toro $\mathbb{T}^n$ são densos.

Exercício 1.2.2. Será que agora para um automorfismo linear hiperbólico em $\mathbb{T}^n$ vale que as variedades estáveis e instáveis são densas? Que existe um residual de pontos transitivos, tal como feito antes?

1.3 Estabilidade estrutural: Automofismo hiperbólico no Rn

Fixemos notação. Se $\xi : B_0 \to B_1$ é uma função contínua do espaço de Banach B_0 ao espaço de Banach B_1, dizemos que ξ é limitada se existe $R > 0$ tal que $|\xi|_0 = sup\{|\xi(x)| \mid x \in B\} < R$. O espaço das funções contínuas e limitadas de B_0 para B_1 é um espaço de Banach com a norma do sup $|.|_0$, denotado por $C_b^0(B_0, B_1)$. Dizemos que ξ é Lipschitz se

$$Lip(\xi) = \sup_{x \neq y} \frac{|\xi(x) - \xi(y)|}{|x - y|} < \infty.$$

Se ξ for uma aplicação linear, dizemos que é limitada se

$$sup\left\{\frac{|\xi(x)|_{B_1}}{|x|_{B_0}}\right\} < \infty$$

Teorema 1.3.1. *Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear hiperbólico. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são mapas Lipschitz tais que*

$$Lip(\phi_i) < \varepsilon,$$

então existe um único mapa contínuo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $|h - I|_0 < \infty$, onde I é a identidade, e

$$(A + \phi_1) \circ h = h \circ (A + \phi_2)$$

Provemos alguns lemas primeiro.

Lema 1.3.1. *Seja $H : V \to V$ um operador linear num espaço de Banach V com $|H| < 1$. Então $I - H$ é um isomorfismo e*

$$|(I - H)^{-1}| \leq \frac{1}{1 - |H|},$$

onde $I : V \to V$ é a identidade.

Proof. Seja $T = \sum_{i=0}^{\infty} H^i$, como a norma de H é menor que um, então T está bem definida (convergência na norma do operador), é um operador linear limitado e

$$(I - H)T = T(I - H) = I$$

A inversa de $(I - H)$ é T e

$$|(I - H)^{-1}| = |T| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |H|^i = \frac{1}{1 - |H|}$$

□

Lema 1.3.2. *Se $V = V_1 \oplus V_2$ é uma soma direta em espaços de Banach V e $H : V \to V$ é um isomorfismo tal que $H(V_i) = V_i$ para $i = 1, 2$, $|H|V_1| < 1$ e $|H^{-1}|V_2| < 1$, então $I - H$ é um isomorfismo. Se considerarmos a norma do máximo em V então*

$$|(I-H)^{-1}| \leq max\left\{\frac{1}{1-|H|V_1|}, \frac{|H^{-1}|V_2|}{1-|H^{-1}|V_2|}\right\}$$

Proof. Seja $u = u_1 + u_2$ com $u_i \in V_i$, então defina

$$T(u) = T(u_1+u_2) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(u_1) + (-\sum_{i=1}^{\infty} H^{-i}(u_2))$$

Então

$$(I-H)T = T(I-H) = I$$

□

Lema 1.3.3. *Seja $f : V \to V$ injetiva, sobrejetiva, Lipszhitz, com inversa Lipzschitz e $(V, |.|)$ Banach. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $g = f + \phi$, onde $||\phi||_0 < \varepsilon$ e $Lip(\phi) < \varepsilon$, então g é injetiva, sobrejetiva, Lipzchitz e com inversa Lipzchitz.*

Proof. Dados $x, y \in V$

$$\begin{aligned} \frac{||f(x)+\phi(x)-f(y)-\phi(y)||}{|x-y|} &\geq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} - \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|} \\ &\geq (Lip(f^{-1}))^{-1} - Lip(\phi) \end{aligned}$$

Assim g é injetiva se $Lip(\phi)$ for pequeno.

Analogamente ao que fizemos acima, mas majorando ao invés de minorar, temos

$$\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \leq Lip(f) + Lip(\phi)$$

As duas desigualdes acima mostram que tanto g quanto g^{-1} são Lipzschitz.

Para ver que é sobrejetiva: dado $y \in V$ considere $H(z) = f^{-1}(y - \phi(z))$, note que H é contração para $Lip(\phi)$ pequeno, pois

$$\begin{aligned} |H(z)-H(w)| &\leq Lip(f^{-1})|y-\phi(z)-y+\phi(w)| && (1.2) \\ &\leq Lip(f^{-1})Lip(\phi)|z-w| && (1.3) \end{aligned}$$

□

Agora sim podemos prova Teorema 1.3.1

Demonstração do Teorema 1.3.1. O teorema segue ao mostrarmos que a equação abaixo tem única solução $u_1 \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, para ε pequeno.

$$(L + \phi_1) \circ (I + u_1) = (I + u_1) \circ (L + \phi_2)$$

Assim,

$$u_1 - L^{-1}u_1 \circ (L + \phi_2) = L^{-1}\phi_2 - L^{-1}\phi_1 \circ (I + u_1). \tag{1.4}$$

Defina

$$\begin{aligned} H : C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ H(u) &= L^{-1} \circ u \circ (L + \phi_2) \end{aligned}$$

onde $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ contínuas e limitadas.

Note que H é uma transformação linear limitada, $|H| \leq |L^{-1}|\ |u|_0$. Portanto, definindo $H_1 := I - H$, H_1 é também uma transformação linear limitada. Podemos reescrever equação (1.4) como

$$H_1(u_1) = L^{-1}\phi_2 - L^{-1}\phi_1 \circ (I + u_1). \tag{1.5}$$

Tomando $Lip(\phi_2)$ suficientemente pequena temos que $(L+\phi_2)^{-1}$ existe e é Lipzschitz. Portanto H possui inversa dada por $H^{-1}(u) = L \circ u \circ (L+\phi_2)^{-1}$. Note que H é um operador linear limitado.

Consideremos os seguintes espações de Banach

$$\overline{V_i} = C_b^0(\mathbb{R}^n, V_i)$$

para $i = 1, 2$, onde V_1 e V_2 são os espaços invariantes de L associados a autovalores com norma menos que um e maior que um respectivamente. Então $C_b^0(\mathbb{R}^n, V_i) = \overline{V_1} \oplus \overline{V_2}$, espaços H invariantes.

Ou seja, concluímos que H é hiperbólica e portanto H_1 possui inversa e sua inversa é um operador linear limitado. Ou seja a equação (1.5) se tranforma em $H_1(u_1) = L^{-1}\phi_2 - L^{-1}\phi_1 \circ (I + u_1)$, ou seja

$$u_1 = H_1^{-1}(L^{-1}\phi_2 - L^{-1}\phi_1 \circ (I + u_1)) = H_1^{-1}(L^{-1}\phi_2) - H_1^{-1}(L^{-1}\phi_1 \circ (I + u_1)).$$

Nosso objetivo é encontrar um ponto fixo em $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ do mapa

$$T : u \mapsto H_1^{-1}(L^{-1}\phi_2) - H_1^{-1}(L^{-1}\phi_1 \circ (I + u)).$$

Calculemos

$$\begin{aligned} ||Tu - Tv||_0 &= ||H_1^{-1}(L^{-1}\phi_2) - H_1^{-1}(L^{-1}\phi_1 \circ (I + u)) \\ &\quad - H_1^{-1}(L^{-1}\phi_2) + H_1^{-1}(L^{-1}\phi_1 \circ (I + v))||_0 \\ &= ||H_1^{-1}(L^{-1}\phi_1 \circ (I + v)) - H_1^{-1}(L^{-1}\phi_1 \circ (I + u))||_0 \\ &= |H_1^{-1}|\ |L^{-1}|\ ||\phi_1 \circ (I + u) - \phi_1 \circ (I + v)||_0 \\ &= |H_1^{-1}||L^{-1}|Lip(\phi_1)||u - v||_0 \end{aligned}$$

Ou seja, para contração basta termos $|H_1^{-1}||L^{-1}|Lip(\phi_1) < 1$. Com a observação de que $|H_1^{-1}|$ só depende de L. Assim provamos o teorema.

□

1.3.1 Outros resultados de Estabilidades

Hartman-Grobman para difeomorfismos

Teorema 1.3.2. *Suponha x_0 um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo C^1. Se Df_{x_0} for hiperbólico, então f é localmente conjugado a sua derivada.*

Hartman-Grobman para fluxos

Teorema 1.3.3. *Hartman-Grobman para fluxos.*

Automorsfimos hiperbólico no toro

Teorema 1.3.4. *Seja $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ automorfismo linear hiperbólico, se $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é suficientemente próximo de A então existe $h : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um homeomorfismo tal que A e f são conjugados.*

Proof. Assim como fizemos na prova do Teorema 1.3.1, queremos aqui encontrar uma única função u_1 para o qual tenhamos

$$(L + \phi_1) \circ (I + u_1) = (I + u_1) \circ (L + \phi_2)$$

Exceto que agora as funções ϕ_1, ϕ_2 e u_1 são periódica. Dizemos que uma função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é periódica se $g(x+m) = g(x)$. Assim na prova do Teorema 1.3.1 continua válida com essas funções satisfazendo essas condições.

□

Chapter 2

Conjunto Hiperbólicos

2.1 Hiperbolicidade

2.1.1 Conjunto Hiperbólico

Consideremos $f : M \to M$ um difeomorfismo e M uma variedade Riemanniana.

Definição 2.1.1. Um conjunto fechado $\Lambda \subset M$ invariante por f é dito hiperbólico se existe $C > 0$, $\lambda \in (0,1)$ e para todo $x \in \Lambda$ existem $E^s(x)$, $E^u(x) \subset T_xM$ tais que

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$;
2. $||df_x^n v^s|| \leq C\lambda^n ||v^s||$, $\forall v^s \in E^s(x)$ e $n \geq 0$;
3. $||df_x^{-n} v^u|| \leq C\lambda^n ||v^u||$, $\forall v^u \in E^u(x)$ e $n \geq 0$;
4. $df_x E^s(x) = E^s(f(x))$ e $df_x E^u(x) = E^u(f(x))$.

Dizemos que Λ, como acima, é conjunto hiperbólico **isolado** ou **maximal** se existe vizinhança $\mathcal{U}$ de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U})$$

Exemplo 2.1.2. Considere $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ hiperbólica. Um exemplo de conjunto hiperbólico maximal para dinâmica $L_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é o próprio $\mathbb{T}^2$.

Exemplo 2.1.3. Considere $L_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, como acima. Vimos que a variedade estável e instável da origem são densas, por serem tansversais existe $y \in W^s(0) \cap W^u(0)$, note que

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(y), f^n(0)) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to -\infty} d(f^n(y), f^n(0)) = 0$$

Assim o conjunto $\Lambda = Orb(y) \cup \{0\}$ é um conjunto hiperbólico invariante, porém não é hiperbólico maximal.

Suponha que Λ seja hiperbólico maxima, então existe um aberto $U \subset \mathbb{T}^2$ tal que $\Lambda = \cap_{i\in\mathbb{Z}} L_A^n(U)$. Seja $\varepsilon = d(\Lambda, U^c) > 0$. Utilize este ε no Lema de Sombreamento (Teorema 1.2.1), assim temos um δ dado pelo teorema. Note que existem iterados $n_1, n_2\mathbb{N}$ tais que $L_A^{-n_1}(y) \in B(0,\delta)$ e $L_A^{n_2}(y) \in B(0,\delta)$. Note que $L_A^{n_1+n_2}(L_A^{-n_1}(y)) = L_A^{n_2}(y)$. Portanto o Lema de Sombreamento em $\mathbb{T}^2$ implica que existe um ponto periódico $p \in \mathbb{T}^2$ periódico e que está sempre a um distância ε de Λ, portanto $p \in \Lambda$, mas só existe um único ponto periódico em Λ.

Proposição 2.1.1. *A decomposição $E^s \oplus E^u$ na definição de conjunto hiperbólico é única.*

Proof. Seja $TM = E^s \oplus E^u = F^s \oplus F^u$, suponha que $E^s \neq F^s$, então existe $v^s \in E^s$ tal que $v^s = w^s + w^u$ com $w^s \in F^s$, $w^u \in F^u$ e $w^u \neq 0$. Como $v^s - w^s = w^u$, temos que

$$||Df^n w^u|| \leq ||Df^n v^s|| + ||Df^n w^s||$$

mas o lado esquedo tende a infinito enquanto o lado direito tende a zero, absurdo. Assim $E^s \subset F^s$, analogamente $E^u \subset F^u$, comparando as dimensões temos que $E^s = F^s$ e $E^u = F^u$. □

Proposição 2.1.2. *Os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com relação a $x \in \Lambda$.*

Proof. Seja $x_0 \in \Lambda$ e x_i uma sequência em Λ que converge a x_0.

Afirmação: $dimE^s(x_i) = dimE^s(x_0)$ e $dimE^u(x_i) = dimE^u(x_0)$ para i sificientemente grande.

Considere uma subsequência de x_i que ainda denotaremos por x_i de modo que $dimE^s(x_i)$ seja constante, digamos igual a k. Considere uma base ortonormal $w_{1,i}, \ldots, w_{k,i}$ de $E^s(x_i)$, passando a uma subsequência x_i', se necessário, podemos supor que $w_{l,i}$ converge a $w_{l,0}$. Note que $w_{1,0}, \ldots, w_{k,0}$ estão em $T_{x_0}M$. Por continuidade note que a condição 2 implica $w_{l,0}$, $l = 1, \ldots, k$, estarem em $E^s(x_0)$. Portanto

$$dimE^s(x_0) \geq k = dimE^s(x_i)$$

Analogamente temos que

$$dimE^u(x_0) \geq dimE^u(x_i)$$

a condição 1 implica que

$$dimE^s(x_0) = dimE^s(x_i),\ dimE^u(x_0) = dimE^u(x_i).$$

Fica provado assim a afirmação. E a continuidade segue facilmente, dado que em uma vizinhança de x_0 o fibrado tangente restrito a Λ possui trivialização da forma $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$. □

Observação 2.1.1. Anosov[1] forneceu um exemplo em que as distribuições (E^s, E^u) não são suaves. E Hasselblat[2] provou que "tipicamente", para o caso em que $\Lambda = M$, as distribuições são apenas Hölder.

Proposição 2.1.3. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para f. Então existe uma métrica Riemanniana $< .,. >_*$, chamada de métrica adaptada, para o qual f satisfaz a condição de hiperbolicidade com constante $C' = 1$. Ou seja*

$$||dfv^s||_* \leq \lambda' ||v^s||_*, \; v^s \in E^s;$$

$$||dfv^u||_* \leq \lambda' ||v^u||_*, \; v^u \in E^u.$$

Proof. Se $v^s \in E^s$ e $v^u \in E^u$ definimos

$$||v^s||_*^2 = \sum_{j=0}^{n-1} ||df^j v^s||^2 \; ; \quad ||v^u||_*^2 = \sum_{j=0}^{n-1} ||df^{-j} v^u||^2.$$

Note que as normas acima provêem de métricas, dado que temos uma soma de métricas. Com isso podemos definir a norma $||.||_*$ que provém de uma métrica.

$$||v||_* := \sqrt{||v^s||_*^2 + ||v^u||_*^2} \tag{2.1}$$

Como os cálculos para a parte E^u será análago, considere de agora em diante $v \in E^s$. Fixemos o número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/(1-\lambda^2) \leq n$.

$$\begin{aligned} ||dfv||_*^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} ||df^j(dfv)||^2 = \sum_{j=0}^{n-1} ||df^{j+1}v||^2 = \sum_{j=1}^{n} ||df^j(dfv)||^2 \quad (2.2) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} ||df^j(v)||^2 + ||df^n v||^2 - ||v||^2 \leq ||v||_*^2 + C\lambda^n ||v|| \\ &- \; ||v||^2 \leq ||v||_*^2 - ||v||^2(1 - (C\lambda^n)^2). \end{aligned}$$

Estamos supondo que $C > 1$, caso contrário não haveria nada a fazer.

$$\begin{aligned} ||v||_*^2 = \sum_{j=0}^{n-1} ||df^j v||^2 &\leq ||v||^2 + C^2\lambda^2||v||^2 + \ldots + C^2\lambda^{2(n-1)}||v||^2 \\ &\leq C^2||v||^2 + C^2\lambda^2||v||^2 + \ldots + C^2\lambda^{2(n-1)}||v||^2 \\ &\leq C^2||v||^2\left(\frac{1-\lambda^{2(n-1)}}{1-\lambda^2}\right) \leq C^2||v||^2\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right) \\ &\leq C^2||v||^2 n. \end{aligned}$$

[1] Anosov, D, **Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature**, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 90 (1969), 1-235

[2] Hasselblatt, B., **Regularity of the Anosov splitting and of Horospheric foliations**, *Ergod. Theory and Dyn. Syst.*, 14 (1994), no. 46:45-666

Desta desigualdade obtemos $||v||_*^2/C^2n \leq ||v||^2$. Fazendo a substituição na equação (2.2) obtemos

$$||dfv||_*^2 \leq ||v||_*^2 - ||v||^2(1-(C\lambda^n)^2) \leq ||v||_*^2 - (||v||_*^2/C^2n)(1-(C\lambda^n)^2).$$

Portanto

$$||dfv||_*^2 \leq (1-(1-(C\lambda)^2)/C^2n)||v||_*^2$$

Fazendo o mesmo para v^u assim, obtemos que $||.||_*$ definida como em (2.1) é uma norma do "tipo que procuravamos". Apenas provamos que a decomposição do fibrado tangente em $E^s \oplus E^u$ é apenas contínua, portanto para considerar uma métrica suave devemos tomar uma métrica suficientemente próxima da que construimos acima.

□

2.1.2 Persistência de ponto periódico hiperbólico

Teorema 2.1.4. *Seja p um ponto periódico de período m hiperbólico para $f: M \to M$, então existe uma C^1 vizinhança $\mathcal{U}_f$ de f tal que $\forall g \in \mathcal{U}_f$ existe um único ponto periódico de período m próximo de p.*

Proof. Olhemos a função em coordenadas, ou seja supomos que estamos em $\mathbb{R}^n$. Considere o mapa

$$F := f^m - Id$$

, que é localmente invertível pois 0 é (agora em coordenadas) ponto periódico hiperbólico. Considere g perto de f, logo

$$g^m = f^m - H$$

on H tem derivadas pequenas.

Assim, um ponto fixo para g^m satisfaz $x = g^m(x) = (f^m - H)(x) = (F + Id - H)(x)$, ou seja

$$x = F^{-1}H(x)$$

Note que

$$||F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)|| \leq ||DF^{-1}||_0||H||_0||x-y|| \tag{2.3}$$

tomando H próximo da identidade temos que $F^{-1}H$ é uma contração. Mas para utilizar o teorema do ponto fixo de Banach precisamos definir a imagem e o domínio como um mesmo compacto.

Considere ε a derivada de H e L a derivada de F^{-1}, então

$$||F^{-1}H(x)|| \leq ||F^{-1}H(x) - F^{-1}H(0)|| + ||F^{-1}H(0)|| \leq \varepsilon L||x|| + \varepsilon L$$

Assim, dado um $R > 0$ tome ε pequeno de forma que $\varepsilon \leq \frac{R}{L(1+R)}$. Com isso temos que $F^{-1}H(B(0,R)) \subset B(0,R)$ e podemos assim aplicar o teorema do ponto fixo de Banach.

□

2.2 Teorema da Variedade estável e instável

Teorema 2.2.1. *Seja Λ um conjunto hiperbólico, então para cada $p \in \Lambda$ existem variedades locais $W^s_{loc}(p)$ e $W^u_{loc}(p)$ tangentes aos subfibrados estável e instável respectivamente e que satisfazem*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x,y),\ x,y \in W^s_{loc}(p);$$
$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x,y),\ x,y \in W^u_{loc}(p).$$

Essas variedades são de classe C^r onde r é a classe de f, formam uma folheação que entanto variam na transversal apenas continuamente (de fato Holder). De fato essas variedades possuem um tamanho uniforme (ε) ou seja

$$\begin{aligned} W^s_{loc}(p) &= \{x \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}\} \\ W^u_{loc}(p) &= \{x \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Definição 2.2.2. Definimos as variedades estável e instável de $p \in \Lambda$ como

$$W^s(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n} W^s_\varepsilon(f^n(p))$$

$$W^u(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{n} W^s_\varepsilon(f^{-n}(p))$$

Proposição 2.2.1. *Vale que*

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{x \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\} \\ W^u(p) &= \{x \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\} \end{aligned}$$

Proof. Exercício. □

Exemplo 2.2.3. Dois sistemas conjugados. Conjugação leva variedade estável em variedade estável. Isto é, queremos ver que se f e g são dois difeomorfismos de Anosov e existe um homeomorfismo tal que $h \circ g = f \circ f$ então

$$h(W^s(p,g)) = W^s(h(p), f)$$

Basta usar a caracterização topológica de variedade estável, ou seja que $W^s(p) = \{x \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$ e que h sendo contínua num compacto é uniformemente contínua.

Proposição 2.2.2. *Dado $R > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $y \in B(p,\delta)$ no conjunto hiperbólico Λ o pedaço de variedade estável de y de raio R, denotado por $W^s_R(y)$ satisfaz*

$$W^s_R(y) \cap B(p,\delta) = \emptyset$$

Proof. Dado um ponto $p \in \Lambda$ considere $W^s_R(p)$, existe δ_p tal que $B(p,\delta_p)\cap W^s_R(p)=\emptyset$, então por continuidade, tomando δ_p menor se necessário, temos

$$B(p,\delta_p)\cap W^s_R(y)=\emptyset, \quad \forall y\in B(p,\delta_p)$$

Note que $M=\cup_{p\in M}B(p,\delta_p)$ e sendo M compacto existe subcobertura finita. Considere uma subcobertura finita e defina δ como sendo o mínino delta associado a essas bolas. □

2.2.1 Lambda-Lema

A seguir o Lambda-Lema, também conhecido como Lema da Inclinação.

Teorema 2.2.4 (Lambda Lema)**.** *Seja $p\in M$ um ponto fixo hiperbólico para o difeomorfismo $f\in Diff^1(M)$. Se D é um disco transversal a variedade estável, $W^s(p)$, em um ponto $q\in W^s(p)$, então dado R e ϵ reais positivos existe N_0 tal que $\forall n\geq N_0$ a componente conexa de $f^n(D)\cap\mathcal{V}_\epsilon(W^u_R(p))$ que contém $f^n(p)$ está ϵ-C^1 próximo de $W^u_R(p)$. Onde $W^u_R(p)$ é a variedade instável de p de raio R e $\mathcal{V}_\epsilon(W^u_R(p))$ é uma vizinhança de distância ϵ de $W^u_R(p)$.*

Proof. Primeiramente observamos que o resultado vale se provarmos o teorema em uma vizinhança de p. Por isso olharemos f em coordenadas e tomaremos coordenadas C^1 tais que as variedades estáveis e instáveis de $p=0$ são os eixos coordenados.

$\mathbb{R}^k\times\{0\}=W^u(0)$ e $\{0\}\times\mathbb{R}^{n-k}=W^s(0)$.

Para uma vizinhança suficientemente pequena, assim como δ pequeno temos

$$Df_z=\begin{pmatrix} A^{uu}_z & A^u_z\\ B^s_z & B^{ss}_z\end{pmatrix}$$

Com $||(A^{uu}_z)^{-1}||<1/(\mu)$, $||B^{ss}_z||<\lambda$ e $||A^u_z||,||B^s_z||<\delta$.

Seja $z\in\{0\}\times\mathbb{R}^{n-k}=W^s(0)$ o ponto q do disco D olhado em coordenadas, note que neste caso como f deixa $W^s(0)$ invariante, então $A^u_z=0$. Seja $E_z:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^{n-k}$ uma transformação linear cujo gráfico seja igual a T_zD. Olhemos para a imagem T_zD pela Df,

$$Df_z\begin{pmatrix} I\\ E_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{uu}_z\\ B^s_z+B^{ss}_zE_z\end{pmatrix}$$

Todavia como estamos interessado na imagem, podemos olhar para a transformação linear dada por

$$E_{z_1}=B^{ss}_zE_z(A^{uu}_z)^{-1}+B^s_z(A^{uu}_z)^{-1}$$

onde $z_1=f(z)$.

$$||E_{z_1}|| \leq ||B_z^{ss}E_z(A_z^{uu})^{-1}|| + ||B_z^s(A_z^{uu})^{-1}|| \leq 1/\mu||B_z^s|| + \lambda/\mu||E_z||$$

Definimos $z_n = f^n(z)$, por indução vemos que

$$||E_{z_n}|| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda)^{n-j-1}}{(\mu)^{n-j}}||B_{z_j}^s|| + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n ||E_{z_0}||$$

Para n grande, podemos controlar o somatário pois $||B_{z_j}^s||$ é bem pequeno quando j é grande e $\lambda/\mu < 1$.

$$\begin{aligned} ||(B_z^s + B_z^{ss}E_z) \circ (A_z^{uu} + A_z^u E_z)^{-1}|| &\leq ||(B_z^s + B_z^{ss}E_z)||1/\mu \\ &\leq (||B_z^s|| + \lambda||E_z||)1/\mu \end{aligned}$$

E $(||B_z^s|| + \lambda||E_z||)1/\mu < \epsilon$ caso estejamos em uma vizinhança sufucientemente próxima de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, já que $B_z^s = 0$ em $\mathbb{R}^k \times \{0\}$.

□

2.3 Lema de Sombreamento

Dizemos que uma sequência $\{x_i\}$ em M é uma δ-**pseudo órbita** para f se $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta$. Um ponto $y \in M$ ϵ-**sombreia** a sequência $\{x_i\}$ se $d(f^i(y), x_i) \leq \epsilon$.

Teorema 2.3.1 (Lema de Sombreamento)**.** *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para f. Existe $\eta > 0$ tal que, dado ε com $0 < \varepsilon \leq \eta$, então existe $\delta > 0$ tal que se $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2}$ for uma δ-pseudo órbita para f com $d(x_i, \Lambda) < \eta$, então:*

- *Existe $y \in M$ tal que y ε-sombreia $\{x_i\}$. E mais*

  1. *Se $j_1 = -\infty$ e $j_2 = \infty$, então y é único;*
  2. *Se $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2}$ for periódica então y é ponto periódico;*
  3. *Se Λ for isolado, então $y \in \Lambda$.*

Corolário 2.3.1. *Se Λ é isolado e g é C^1-próxima de f então vale o Lema de Sombreamento com as mesmas contantes para g e Λ_g. Onde Λ_g como no Teorema 2.4.1.*

Proof. As propriedades usadas na prova do lema de sombreamento são robustas por pertubação. □

Corolário 2.3.2. *Λ hiperbólico, então $f|\Lambda$ é expansivo*

Proof. Utilizando o lema de sombreamento, tome um ε pequeno, então o lema dá um $\delta > 0$. Defina $\widetilde{\delta} = min\{\delta, \varepsilon\}$, vejamos que esta é a constante de expansividade. Onde δ é dado pelo lema de sombreamento. Por absurdo, suponha $x \neq y$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) < \widetilde{\delta}$, como $\{f^n(y)\}$ é δ-pseudo órbita existe único que a ϵ acompanha. Logo $x = y$. □

Definição 2.3.2. Dizemos que $x \in X$ é um ponto *não-errante* para $f : X \to X$ contínua, se: dada uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Caso contrário, dizemos que x é *errante*. Denotamos o conjuntos dos pontos não errantes de f por $\Omega = \Omega(f)$.

Exercício 2.3.1. Considere um difeomorfismo de M em M e p um ponto fixo hiperbólico tal que $W^s(p) \cap W^u(p) \neq \emptyset$. Seja y um ponto desta interseção e defina defina $\Lambda = \{p\} \cup Orb(y)$. Então

$$\Omega(f|\Lambda) = p \text{ e } \Lambda \subset \Omega(f).$$

Proposição 2.3.1. *Se Λ é hiperbólico isolado, então $\overline{Perf|_\Lambda} = \Omega(f|_\Lambda)$.*

Proof. Já sabemos que $\overline{Perf|_\Lambda} \subset \Omega(f|_\Lambda)$.

Seja $x \in \Omega(f|_\Lambda)$. Dado $\epsilon_0 > 0$ quero achar um ponto periódico ϵ_0 perto de x. Do lema de sombreamento tome $\epsilon = \epsilon_0/2$, existe portanto o δ. Considere a bola B de raio $r < min\{\epsilon, \delta/2\}$ centrada em x. Como x é não errante, existe um iterado $k \in \mathbb{N}$ de algum $y \in B$ tal que $f^k(y) \in B$. Completamos esta sequência para obter a seguinte δ-pseudo periódica órbita:

$$\{\ldots, f^k(y), y, f(y), f^2(y), \ldots, f^k(y), y, \ldots\}$$

e pelo lema de sombreamento existe $y_0 \in \Lambda$ (aqui usamos Λ isolado) que ϵ-sombreia e é periódico. Das escolhas feitas, segue que

$$d(y_0, x) < d(y_0, y) + d(y, x) < \epsilon + r < \epsilon_0/2 + \epsilon_0/2$$

Concluimos que y é o ponto periódico procurado. □

Definição 2.3.3. Seja X compacto. Um conjunto $Y \subset X$ é *minimal* se for f invariante, fechado e não contém propriamente nenhum outro subconjunto fechado e invariante.

Exercício 2.3.2. Y é minimal se, e somente se, todo ponto tiver órbita densa.

Proposição 2.3.2. *Sejam X compacto e $f : X \to X$ contínua. Então X contém um conjunto minimal para f.*

Proof. Seja $\mathcal{C}$ a coleção dos conjuntos fechados e invariantes. Note que $X \in \mathcal{C}$. Dotamos $\mathcal{C}$ de uma ordem parcial dada por: $A \prec B$ se $A \supset B$. Suponha que $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ seja um conjunto totalmente ordenado. Como a interseção de compactos encaixantes não é vazia temos que $\cap_{K \in \mathcal{K}} K$ é maior que qualquer outro elemento de $\mathcal{K}$. Pelo lema de Zorn existe um maximal, que é, portanto, um conjunto minimal. □

Definição 2.3.4. Dizemos que um ponto q é homoclínico com relação ao ponto p se $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$. Se em q a interseção for tranversal então q é um ponto homoclínico transversal.

Teorema 2.3.5. *Todo ponto homoclínico transversal é acumulado por pontos periódicos.*

Proof. Seja $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ um ponto de intersecção transversal. Podemos supor p ponto fixo. Defina o conjunto

$$\Lambda = \{p\} \cup \mathcal{O}(q)$$

Λ é fechado invariante. Para usar o lema de sombreamento queremos olhá-lo como um conjunto hiperbólico. Precisamos encontrar a decomposição nos subespaçoes invariantes contrativos e expansivos. Definimos $E^s(q)$ como sendo o espaço tangente a variedade estável de q, analogamente $E^u(q)$, $E^s(q)$, $E^u(q)$. Para os outros pontos definimos $E^s(f^n(q)) = df^n_q(E^s(q)$ analogamente para a variedade instável. Podemos assim utilizar o lema de sombreamento para Λ.

Dado ϵ_0 queremos achar um ponto periódico ϵ_0 próximo de q. Tome no lema de sombreamento $\epsilon = \epsilon$, e seja δ o delta para pseudo-órbita. Como $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ podemos tomar para k suficientemente grandes a seguinte δ-pseudo periódica órbita.

$$\{\ldots, f^k(q), f^{-k}(q), \ldots, f^{-1}(q), q, f(q), \ldots, f^k(q), f^{-k}(q), \ldots\}$$

Existe portanto y_0 periódico que ϵ aproxima esta pseudo-órbita. Portanto existe uma ponto periódico ϵ próximo de q.

□

Definição 2.3.6. Definimos os conjuntos estáveis e instáveis para um subconjunto $A \subset M$ respectivamente por

- $W^s(A) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(A)) \to 0 \;\text{ quando }\; n \to \infty\}$;
- $W^u(A) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(A)) \to 0 \;\text{ quando }\; n \to -\infty\}$.

Proposição 2.3.3. *Seja Λ hiperbólico maximal. Então*

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x), \quad W^u(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x)$$

Proof. Analisemos o caso estável sendo o instável análogo. Uma inclusão é fácil ($\supseteq$), provemos a outra ($\subseteq$).

Seja $y \in W^s(\Lambda)$. Definamos $\varepsilon_0 = d(\Lambda, U^c)$ onde U é a vizinhança de isolamento de Λ. Do lema de sombreamento tome $\varepsilon = \varepsilon_0/2$, o que nos fornece um δ. Sendo f suave em um compacto, seja L_0 de forma que $d(f(x), f(y)) \leq L_0 d(x,y)\ \forall x, y \in M$. Seja N_0 grande o suficiente para que, se $n \geq N_0$ então

$$d(f^n(y), \Lambda) < \overline{\delta},\ n \geq N_0\ ;\ \overline{\delta} := min\{\delta(1/(1+L_0), (\epsilon_0/2)\}$$

Existem $x_n \in \Lambda$ com $d(x_n, f^n(y)) < \overline{\delta}$ para $n \geq N_0$. Queremos encontrar uma δ-pseudo órbita. Para $n \geq N_0$ tomemos x_n para $n < N_0$ definimos $x_j = f^{-N_0+j}(x_{N_0})$.

Afirmação: $\{x_n\}$ é uma δ-pseudo órbita.

Basta checarmos para $n \geq N_0$ pois para trás temos uma órbita.

$$d(x_{n+1}, f(x_n)) \leq d(x_{n+1}, f^{n+1}(y)) + d(f^{n+1}(y), f(x_n)) \leq \overline{\delta} + L_0 d(f^n(y), x_n)$$
$$\leq \overline{\delta} + L\overline{\delta} = \overline{\delta}(1+L_0) \leq \delta$$

O que termina a prova da afirmação. Portanto pelo lema de sombreamento existe um $y_0 \in \Lambda$ (aqui usamos que é isolado) que ϵ sombreia esta pseudo órbita.

Note que para $n \geq N_0$

$$d(f^n(y), f^n(y_0)) \leq d(f^n(y), x_n) + d(x_n, f^n(y_0)) \leq \overline{\delta} + \epsilon_0/2 \leq \epsilon_0/2 + \epsilon_0/2 = \epsilon_0$$

Então $f^{N_0}(y) \in W^s_{loc}(f^{N_0}(y_0))$, concluimos assim que $y \in W^s(y_0)$.

□

Exemplo 2.3.7. Construamos um exemplo em que Λ seja hiperbólico, mas $W^s(\Lambda) \neq \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x)$.

Olhando para a ferradura, sob o ponto de vista da dinâmica simbólica definimos Λ como sendo o conjuntos das sequências $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de zero e um com a propriedade que os zeros aparecem apenas em blocos (não necessariamente finito) de tamanho par. Tome $x_0 = (\ldots 11.0100010000010000001\ldots)$, aparece um 0 seguido de um 1 depois três zeros seguido de 1, cinco zeros seguido de 1, e assim por diantes. Acrescentando sempre uma quantidade ímpar de zeros.

É fácil ver que $x_0 \in W^s(\Lambda)$, já que no iterado $\sigma^n(x_0)$ sempre achamos um elemento de Λ que coincida com x_0 em torno (centrado na posição zero) das $n-2$ coordenadas. Mas não existe $p \in \Lambda$ tal que $x_0 \in W^s(p)$ pois se isso acontecesse x_0 e p coincidiriam as entradas a partir de um momento, o que não pode ocorrer.

Exemplo 2.3.8. *Existe minimal não trivial (i.e. não é órbita de um ponto periódico), na ferradura.*

Pegue R_α uma rotação irracional em S^1. Seja $x_0 \in S^1$, tome $x_1 = f(x_0)$ e $y_0 = f(x_1)$. Sejam I_0, I_1 abertos conexos tais que $S^1 \backslash \{x_0, x_1\} = I_0 \cup I_1$. Defina $\theta(n)$ para $n \geq 0$ por $f^n(y_0) \in I_{\theta(n)}$. Por fim, defina $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ por $\eta(n) = \theta(|n|)$.

Vejamos que $\omega(\eta)$ não contém pontos periódicos. Por absurdo, suponha que exista sequência de naturais $n_i \to \infty$ tais que $d(\sigma^{n_i}(\eta), p) \to 0$. Onde σ é a função shift e p um ponto periódico. Seja k o período do ponto p. A rotação irracional $R_{k\alpha}$ tem a propriedade: existe n_0 tal que para todo ponto $x \in S^1$ o conjunto $\{R^n_{k\alpha}(x)\}_{n=0}^{n_0}$ possui elementos em I_0 e em I_1. (Para provar esta afirmação basta ver que vale pontualmente, pois a rotação é transitiva, então vale localmente e usa o fato que S^1 é compacto.)

Mas $d(\sigma^{n_i}(\eta), p) \to 0$ implica que podemos achar iterados consecutivos que caiam dentro de I_0 (ou I_1). Ou seja,

$$R^{l_0}_\alpha(y_0), R^{l_0+k}_\alpha(y_0), R^{l_0+2k}_\alpha(y_0), \ldots, R^{l_0+mk}_\alpha(y_0) \in I_0$$

por conseguinte,

$$R^{l_0}_\alpha(y_0), R_{k\alpha}(R^{l_0}_\alpha(y_0)), R^2_{k\alpha}(R^{l_0}_\alpha(y_0)), \ldots, R^m_{k\alpha}(R^{l_0}_\alpha(y_0)) \in I_0$$

O que é um aburdo pela propriedade de $R_{k\alpha}$ comentada anteriormente.

Concluimos que $\omega(x)$ não contém pontos periódicos e possui, pela Proposisão 2.3.2, um minimal que, portanto, não é trivial.

2.4 Conjunto Hiperbólico Maximal

Proposição 2.4.1. *Seja $f : M \to M$ suave. Dado $\delta > 0$ existe vizinhança $\mathcal{U}_f \subset Dif^1(M)$ de f tal que $\forall g \in \mathcal{U}_f$ tem-se que $\{g^i(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ é uma δ-pseudo órbita para f $\forall x \in M$.*

Proof. Considere $\mathcal{U}_f$ pequena o suficiente tal que $d(f(x), g(x)) \leq \delta$ $\forall x \in M$. Então

$d(f(g^i(x)), g^{i+1}(x)) = d(f(g^i(x)), g(g^i(x))) \leq \delta$ □

Teorema 2.4.1. *Se Λ é um conjunto hiperbólico isolado para f, então existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de Λ e $\mathcal{U}_f$ de f; tal que: se $g \in \mathcal{U}_f$, então*

$$\Lambda_g := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(\mathcal{U})$$

é hiperbólico isolado para g.

Proof. Vejamos como escolher as vizinhanças do enunciado. Considere $\mathcal{U}$ uma vizinhança de isolamento de Λ para f, podemos tomar esta vizinhança menor, se necessário, de forma que esteja dentro da vizinhança fornecida pelo Lema de Sombreamento (Teorema 2.3.1). Dado $\varepsilon = \frac{1}{2}d(\Lambda, \partial\mathcal{U})$, o Lema de Sombreamento fornece um δ. Tomemos a vizinhança $\mathcal{U}_f$ pequena o suficiente (uma δ-vizinhança por exemplo) para que $\forall x \in M$, $\{g^n(x)\}$ seja uma δ-pseudo órbita para f (Proposição (2.4.1).

Provemos que $\Lambda_g \subset \mathcal{U}$, ou seja isolado. Suponha por absurdo que exista $x \in \Lambda_g \cap \partial\mathcal{U}$. Como $\{g^n(x)\}$ é uma δ-pseudo órbita para f, existe $y \in \Lambda_f$ que

ε sombreia a pseudo-órbita $\{g^n(x)\}$, em particular $d(y,x) \leq \varepsilon = \frac{1}{2}d(\Lambda, \partial\mathcal{U})$, por exemplo isto dá que x não está no bordo, absurdo.

É fácil ver que pelo provado acima Λ_g deve ser um conjunto fechado, como estamos supondo na definição de conjunto hiperbólico.

Sabemos que podemos tomar a vizinhancça $\mathcal{U}_f$ pequena o suficiente para que Λ_g seja de fato um conjunto hiperbólico (usando cones invariantes). Por fim, usando que $\Omega(f|_\Lambda) = \overline{Per(f|_\Lambda)}$ implica que existe um ponto hiperbólico periódico, que é mantido por perturbações (por exemplo por Hartman-Grobman). O que implica que $\Lambda_g \neq \emptyset$ para perturbações próximas de f. $\square$

Lema 2.4.1. *Seja Λ hiperbólico maximal. Existe $\delta > 0$ tal que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$ para todo $|n| < N$, então $d(x,y) < \epsilon$.*

Proof. A prova é um escólio da demonstração do Teorema da Variedade estável. $\square$

Teorema 2.4.2. *(Estabilidade de Conjunto Hiperbólico Isolado) Seja Λ_f hiperbólico isolado para $f : M \to M$. Então existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de Λ_f e $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que $\Lambda_g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(\overline{U})$ é conjugado a Λ_f. Isto é, existe homeomorfismo $h : \Lambda_f \to \Lambda_g$ fazendo o diagrama abaixo comutar*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_f & \xrightarrow{f} & \Lambda_f \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \Lambda_g & \xrightarrow{g} & \Lambda_g \end{array}$$

Proof. Para vizinhanças pequenas o suficiente em torno de f temos que Λ_g é não vazio. De fato, como

$$\overline{Per(f_{|\Lambda_f})} = \Omega(f_{|\Lambda_f})$$

temos pontos periódicos hiperbólicos e que são mantidos por perturbações. Portanto Λ_g é não vazio.

Encontremos a função h. Tome $\epsilon < \delta_0/3$, onde δ_0 é a constante de expansividade de f. Para este ϵ seja δ dado pelo lema de sombreamento. Com isso considere uma δ-vizinhança, $\mathcal{V}_f$, de f na topologia C^1 e pequena o suficiente para que $\Lambda_g \neq \emptyset$. Isto quer dizer que se $g \in \mathcal{V}_f$, então para $x \in \Lambda_f$ temos que $\{f^n(x)\}$ é uma δ-pseudo órbita para g:

$$d(g(f^{n-1}(x)), f^n(x)) = d(g(f^{n-1}(x)), f(f^{n-1}(x)) < \delta$$

Definimos a função

$$\begin{aligned} h : \Lambda_f &\to \Lambda_g \\ x &\mapsto h(x) \end{aligned}$$

onde $h(x)$ é um ponto que ϵ-sombreia $\{f^n(x)\}$.

Provaremos que h^{-1} é contínua. O que implica que h é homeomorfismo, dado que uma bijeção contínua em um compacto é um homeomorfismo.

Dado $\widetilde{\epsilon} > 0$, seja $N = N(\widetilde{\epsilon})$ proveniente do lema acima para $\widetilde{\epsilon}$ e f. Tome $\widetilde{\delta}$ tal que se $d(x, y) < \widetilde{\delta}$, então $d(g^n(x), g^n(y)) < \delta/3$ para $|n| < N$.

$$\begin{aligned} d(f^n(h^{-1}(x)), f^n(h^{-1}(y)) &\leq d(f^n(h^{-1}(x)), g^n(x)) + d(g^n(x), g^n(y)) \\ &+ d(g^n(y), f^n(h^{-1}(y)) < \widetilde{\delta}/3 + \widetilde{\delta}/3 + \widetilde{\delta}/3 \\ &= \widetilde{\delta} \end{aligned}$$

usamos que $d(g^n(x), f^n(h^{-1}(x))$ e $d(g^n(y), f^n(h^{-1}(y)))$ são menores que $\widetilde{\delta}/3$ pois como definimos acima $\{f^n(h^{-1}(x))\}$ ϵ-sombreia $\{g^n(x)\}$. Portanto $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \widetilde{\epsilon}$

Logo h é um homeomorfismo. Por fim note que h é a conjugação entre Λ_f e Λ_g, dado que por definição $h \circ f = g \circ h$. □

Observação 2.4.1. Todd Fisher [3] mostrou que existem conjuntos hiperbólicos que não estão contidos em nenhum conjunto hiperbólico maximal. De fato é possível mostrar que este exemplo é robusto e pode ser construído em qualquer variedade de dimensão maior ou igual a dois.

Estrutura de Produto Local

Uma maneira equivalente de se definir conjunto hiperbólico maximal é dizer que este possui estrutura de produto local.

Definição 2.4.3. Dizemos que um conjunto hiperbólico Λ tem *estrutura de produto local* (E.P.L.) se:

Existem $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in \Lambda$ satisfazendo $d(x, y) < \delta$, então
$$[x, y] := W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$$
é um único ponto e este ponto está em Λ.

Teorema 2.4.4 (Sombreamento com E.P.L.)**.** *Seja f um difeomorfismo e Λ um conjunto hiperbólico com estrutura de produto local (E.P.L.).*

- *Então para todo $\beta > 0$, existe um $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo-órbita $\underline{x} = \{x_n\} \subset \Lambda$ é β-sombreada por um ponto $y \in \Lambda$.*

E mais, se $\beta < \delta/2$ onde δ é a constante de expansividade de f e $\underline{x}$ é bi-infinita, então y é único.

[3] Todd Fisher, Hyperbolic sets that are not locally maximal, *Ergodic Theory Dynam Systems 26, 2006.*

Proof. É dado $\beta > 0$. Usando a propriedade de produto local, sabemos que existe ϵ, δ tal que se $d(x,y) < \delta$ então $[x,y] = [x,y]_{\epsilon,\delta} = W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ é um único ponto e que está em Λ. Tomamos ϵ, δ menores, se necessário, de forma que

$$\frac{\epsilon}{(1-\lambda)} < \beta/2.$$

Em particular, $\epsilon < \beta/2$. Sejam λ e C da definição de conjunto hiperbólico, vimos que podemos supor $C = 1$. Lembre que $\lambda < 1$.

Agora definimos α da seguinte maneira: α é um número positivo menor que δ tal que se $d(z,w) < \alpha$, então

$$[z, W^s_{\lambda\epsilon}(w) \cap \Lambda] \subset W^s_\epsilon(z)$$

Seja $\underline{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ uma α-pseudo-órbita finita em Λ. Defina $y_0 = x_0$. Note que $y_1 = [x_1, f(y_0)]$ está bem defindo por ser $\underline{x}$ uma α-pseudo-órbita. Definimos y_k por

$$y_k = [x_k, f(y_{k-1})], \forall n \in \{1, \ldots, n\}$$

De fato precisamos ver que y_k está bem definida. A prova é por indução, vimos que para $k = 1$ é verdade. Aplicando a hipótese de indução $y_k \in W^s_\epsilon(x_k) \cap \Lambda$, então $f(y_k) \in W^s_{\lambda\epsilon}(f(x_k))$ e pela definição de α isto implica que y_{k+1} está bem definida.

Note que $y_k \in W^u_\epsilon(f(y_{k-1}))$, assim $f^{-j}(y_k) \in W^u_{\theta_j}(y_{k-j})$, onde $\theta_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda^i \epsilon < \gamma := \epsilon/(1-\lambda)$. Vejamos que o ponto $y = f^{-n}(y_n)$ β-sombreia $\underline{x}$. Como $f^{-(n-j)}(y_n) = f^j(y) \in W^u_\gamma(y_j)$ temos

$$d(f^j(y), x_j) \le d(f^j(y), y_j) + d(y_j, x_j) \le \gamma + \epsilon < \beta.$$

Por fim, se $\underline{x}$ for infinito achamos um ponto z_n que β-sombreia $\underline{x}_n = \{x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. E tomando um ponto de acumulação de $\{z_n\}$ obtemos um ponto em Λ que β-sobreia $\underline{x}$.

Para a última parte, suponha que tenhamos dois pontos y_1, y_2 que β-sombream, então

$$d(f^n(y_1), f^n(y_2)) \le d(f^n(y_1), x_n) + d(x_n, f^n(y_2)) \le \beta, \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Portanto, $y_1 = y_2$. □

Teorema 2.4.5. *Seja f um difeomorfismo. Um conjunto hiperbólico Λ é isolado se, e somente se, Λ tem estrutura de produto local.*

Proof. $(\Rightarrow)$: Como Λ é hiperbólico compacto, sabemos que existem $\delta_0, \epsilon_0 > 0$ tais que se $d(x,y) < \epsilon_0$ então $[x,y] = W^s_{\epsilon_0}(x) \cap W^u_{\epsilon_0}(y)$ é constituído de exatamente um ponto. Sendo Λ hiperbólico, sejam ϵ, δ tal que numa δ vizinhança de Λ toda δ pseudo-órbita nesta vizinhança é ϵ-sombreada por algum ponto de Λ. Queremos checar que $z = [x, y] \in \Lambda$, mas por um lado $d(f^n(x), f^n(z)), d(f^{-n}(y), f^{-n}(z)) < \epsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, como podemos tomar esses ϵ e δ tão pequenos quanto quisermos, $d(f^n(z), \Lambda) < \epsilon$ e sendo $\{f^n(z)\}$ uma δ-pseudo-órbita existe um único conjunto cujo a órbita o ϵ sombreia, logo este ponto deve ser o próprio z e deve estar em Λ já que Λ é isolado.

$(\Leftarrow)$: Considere $\mathcal{V}$ uma vizinhança de Λ a qual estendemos os cones invariantes de forma que $\Lambda_{\mathcal{V}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\mathcal{V})$ seja hiperbólico. Chamemos de δ a constante de expansividade deste conjunto hiperbólico. Sendo Λ hiperbólico com E.P.L. considere ϵ, δ fazendo o papel de α, β na Proposição 2.4.4. Tomemos $\overline{\delta}$ tal que $d(f(x), f(y)) < \delta/2$ se $d(x, y) < \overline{\delta}$ (por compacidade f é uniformemente contínua) e $\overline{\delta} < \delta/2$. Denotando $\mathcal{U}_{\overline{\delta}}$ a $\overline{\delta}$-vizinhança de Λ provemos que

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U}_{\overline{\delta}}).$$

O número $\overline{\delta}$ é escolhido pequeno o suficiente para que $\mathcal{U}_{\overline{\delta}} \subset \mathcal{V}$ e ϵ pequeno para que tenhamos unicidade no sombreamento com E.P.L. assim como $\epsilon < \delta/2$. Seja $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U}_{\overline{\delta}})$, então $f^n(z) \in \mathcal{U}_{\overline{\delta}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Para todo n natural considere $x_n \in \Lambda$ tal que $d(f^n(z), x_n) < \overline{\delta}$. Observe que $\{x_n\}$ é uma δ-pseudo-órbita

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq d(f(x_n), f(f^n(z))) + d(f^{n+1}(x_n), x_{n+1}) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

A Proposição 2.4.4 diz que existe um ponto $y \in \Lambda$ que ϵ sombreia. Para todo inteiro n

$$d(f^n(z), f^n(y)) \leq d(f^n(z), x_n) + d(x_n, f^n(y)) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Por expansividade do hiperbólico $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{V})$, então $z = y \in \Lambda$.

$\square$

Exemplo 2.4.6. Em particular o conjunto $\Lambda = \{p\} \cup \mathcal{O}(q)$, construído no Teorema 2.3.5 não é isolado, pois não tem estrutura de produto local. Para ver que não tem E.P.L. olhe em torno do ponto p.

Bibliography

[1] *A. Katok and B. Hasselblatt*, **Introduction to the modern theory of dynamical systems**, vol. 54 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[2] *R. Varão*, **Dinâmica Hiperbólica e Teoria Ergódica**, disponível em http://www.ime.unicamp.br/∼regisvarao/out/din.hip.pdf