Notas de aula: Topologia Geral

Prof. Régis Varão - IMECC-UNICAMP
www.ime.unicamp.br/∼regisvarao

Contents

1 Bate papo matemático

Considere um objeto feito de borracha que pode ser esticado, dobrado, torcido. Você faz tudo isso com ele, só não pode rasgar. O resultado é que o novo objeto, depois de esticado, dobrado, torcido, mantém certas propriedades em comum com o objeto no seu "estado inicial". Essas são *propriedades topológica* e as estudaremos nesse curso. Não estamos, *a priori* interessados em medir tamanhos ou ângulos, estamos interessados nas propriedades essenciais invariantes por homeomorfismos. É por isso que nesse curso beberemos café em toros:

1.1 O que é Topologia?

Como responder ao questionamento "O que é Matemática?"? Uma boa resposta é dada no livro *What is Mathematics* de Courant and Robbins [?].

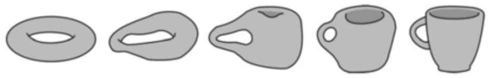


Figure 1: Toro e Caneca

A moral é que a resposta para a pergunta é o próprio livro, ou seja eles mostram o que é a matemática fazendo matemática. Como motivação nesta subseção eu respondo o que é topologia por meio de uma discussão sobre um teorema que você com certeza já ouviu falar: a fórmula de Euler.

Esse teorema afima que para um poliedro convexo

$$V - A + F = 2$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F o número de faces. Você provalmente se deparou com a fórmula de Euler em um contexto de Geometria. Mas a verdade é que esse é um teorema de topologia, de fato os matemáticos levaram um tempo para perceber isso. Foi Poincaré quem formalizou e deu uma cara matematicamente rigorosa a esse teorema. O teorema vale mais geral, considere um poliedro "tipo um toro" o número $V - A + F$ é zero e todo poliedro que for homeomorfo a esse também terá $V - A + F$ igual a zero.

Ou seja, um poliedro "tipo" toro e um poliedro "tipo" esfera (e.g. convexo) possuem $V - A + F$ diferentes.

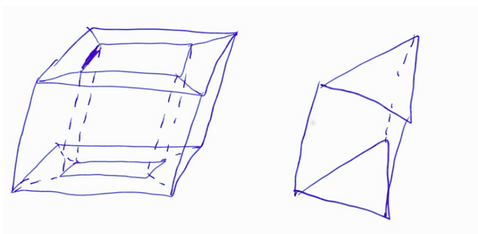


Figure 2: Poliedros: "tipo" toro e "tipo" esfera

Na Figura 1.1 podemos facilmente calcular $V - A + F$ para a primeira figura: $16 - 32 + 16 = 0$. Para a segunda: $6 - 9 + 5 = 2$

Esse "tipo" significa que eles carregam as informações topológicas do toro e da esfera respectivamente. E o que ocorre é que o toro e a esfera são topologicamente diferentes. Mas será que nós conseguimos distinguir a esfera do toro (vide Exercício 1.1) nesse curso? A resposta é sim e a ferramente que usaremos chama-se Grupo Fundamental. Essa ferramenta formaliza o conceito de que a esfera não tem buracos e o toro tem um buraco. Legal! O nome elegante e matematicamente correto para “buraco” é “genus”, palavra cunhada por Bernhard Riemann (1826 - 1866).

Exercício 1.1. Prove que o toro e a esfera não são homeomorfos (**obs**: Não precisa saber grupo fundamental).

Vou fazer uma prova *à la sistemas dinâmicos* da fórmula de Euler para poliedros convexos. Simples, elegante e divertida, você não vai esquecer. Não estou preocupado nessa altura em fazer uma prova extremamente rigorosa com todos os detalhes, você pode fechar os detalhes. De qualquer maneira existem muitas demonstrações desse teorema e você pode procurar.

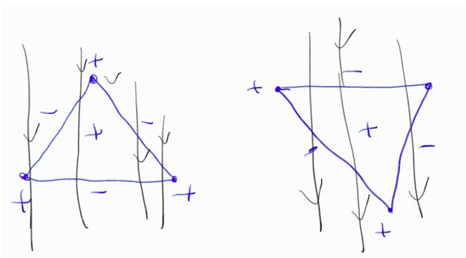
Teorema 1.1. *Para um poliedro convexo vale:* $V - A + F = 2$.

Proof. Dado o poliedro X considere uma subdivisão dele de forma que ele esteja todo subdividido em triângulos. Como o poliedro é convexo seja p um ponto no interior do poliedro e considere uma esfera de raio suficientemente grande de forma que o poliedro esteja dentro dessa esfera. Considere a projeção radial do poliedro X na esfera. Para isso considere o ponto p e dado um ponto $q \in X$ o ponto q será porjetado na esfera pela interseção da semi-reta que começa em p e tem direção $q - p$.

Agora temos um ”poliedro” na esfera que é subdividido por triangulos. Suponha que o polo norte P_N e o polo sul P_S estejam, cada um, no interior de um triângulo. E considere um fluxo norte sul. Ou seja, apenas um fluxo que sai do polo norte e vai para o polo sul. Vamos supor que o fluxo nunca é tangente as arestas dos triângulos, isso podemos fazer só perturbando um pouco o fluxo, ou se quiser pode mexer os triângulos empurrando um pouquinho.

Agora vamos fazer o seguinte vamos colocar carga positiva para os vértices e as faces e carga negativa nas arestas. E quando deixamos o fluxo seguir quando a carga positiva encontra a negativa elas se cancelam. Da forma que escolhemos o fluxo para os triângulos que não contêm o P_N e o P_S temos o seguinte:

Note que quando o fluxo passa o que fica dentro desses triângulos fica com carga zero. Assim tudo zera exceto o que acontece nos dois triângulos extremos. No que contém o polo norte sobrou a carga positiva do polo norte e o fluxo entrando dentro do triângulo do polo sul fica com carga positiva. Então ao todo temos duas cargas positiva. E note que a soma de todas as cargas é exatamente $V - A + F$ que é igual a dois. $\square$



1.2 O viajante que era destro e não é mais

Como vimos a esfera tem número de euler igual a dois e o toro tem o número de Euler igual a zero. O legal é que se M for uma superfície orientável, compacta sem bordo então existe um invariante topológico que classifica todas essas superfícies. Esse invariante é justamente $V - A + F$. Ou seja suponha que você é um habitante desta superfície, você reune todo mundo e triangularizam a superfície inteira, contam os vértices, as arestas e as faces e descobrem como é o "universo" que vocês vivem. Mas lembre-se que nesse exercício mental você precisa ser um vivente dois-dimensional.

No caso de M como acima temos que o genus determina $V - A + F$ (também chamado de característica de Euler $\chi(M)$). Isto é, se g for o genus então $\chi(M) = 2 - 2g$. O mais fascinante é que esse teorema topologico se relaciona fortemente com a geometria da variedade. O Teorema de Gauss-Bonnet diz que a $\int_M KdM = 2\pi\chi(M)$. Fantástico!

A classificação é importante levar em conta que a superfície seja orientável, pois você pode morar em uma superfície cuja característica de Euler seja zero mas ela não seja o toro. Nesse caso pode ser que você esteja morando na garrafa de Klein.

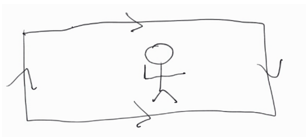


Figure 3: Garrafa de klein e um habitante

As setas indicam como estamos colando as pontas. Se você for da esquerda para a direita você aparecerá do outro lado de cabeça para baixo. Mas não é só isso. Caminhe para a esquerda e depois vire-se para cima, você vai ver que deixou de ser destro e virou canhoto. Se você mora na garrafa de klein (que não é orientável) e vai fazer um passeio pode ser que você saia destro e volte canhoto para casa.

2 Exercícios de aquecimento

Exercício 2.1. Considere duas funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Sejam $A, A_i \subset X$, $B, B_i \subset Y$ com $i \in I$ onde I é um conjunto qualquer. Prove que:

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;
3. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
4. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
5. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$;
6. $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$;
7. $f(f^{-1}(A)) \subset A$;
8. $B \subset f^{-1}(f(B))$.
9. Onde não há igualdade procure contra-exemplos.

Exercício 2.2. Seja $f : X \to Y$ uma função e $f_A : A \to Y$ a restrição de f ao subconjunto $A \subset X$. Prove que $f_A^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$.

Exercício 2.3. Se X e Y são dois conjuntos enumeráveis, então $X \times Y$ é enumerável.

Exercício 2.4. O conjunto $\mathbb{Q}[X]$ dos polinômios com coeficientes racionais é um conjunto enumerável.

Exercício 2.5. Se X é enumerável infinito, então existem $A, B \subset X$ infinitos enumeráveis e disjuntos tais que $X = A \cup B$.

Exercício 2.6. Verdadeiro ou Falso: Se $X \subset \mathbb{R}^2$ é tal que X^c é enumerável, então quaisquer dois pontos de X pode ser ligado por um caminho inteiramente contido em X.

Exercício 2.7. Verdadeiro ou Falso: Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x, .)$ e $f(., y)$ são contínuas, então f é contínua.

Exercício 2.8. V ou F: Existe $X \subset \mathbb{R}^2$ enumerável com pelo menos dois pontos que é conexo (topologia usal do plano).

Exercício 2.9. Prove que $\mathbb{R}^2$ não pode ser escrito como união disjunta de círculos (círculos são conjuntos da forma $\{(x, y)|(x - a)^2 + (y - b)^2 = r > 0\}$)

Exercício 2.10. Prove que o Toro sólido em $\mathbb{R}^3$ é uma união disjunta de círculos.

Exercício 2.11. Pesquise o enunciado do Lema de Zorn. Enuncie corretamente e entenda o enunciado.

Exercício 2.12. Enuncie entendendo o enunciado: O teorema da curva de Jordan e (um melhoramento deste) o Teorema de Schoenflies.

Exercício 2.13. Prove que $\mathbb{R}^2$ não é a união de círculos topológicos (i.e. curvas sem auto-interseção, fechadas e não degenerada, ou seja não são pontos.)

Exercício 2.14. (Desafiador) Prove que $\mathbb{R}^3$ é a união de círculos topológicos.

3 Topologia

Definição 3.1. Uma topologia em X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguinte propriedades:

- $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$;
- A união qualquer de conjuntos de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$;
- A interseção finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

O conjunto X com uma topologia $\mathcal{T}$ é chamado de **espaço topológico**.

Definição 3.2. Seja X um espaço topológico, então os elementos da topologia $\mathcal{T}$ são chamados de **conjunto aberto**. O complementar de um conjunto aberto é dito **fechado**.

Proposição 3.1. *Se X é um espaço topológico, então*

- *$\emptyset, X$ são fechados;*
- *A interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado;*
- *A união finita de conjutos fechados é um conjunto fechado.*

Proof. Segue direto das propriedades de conjuntos (em particular lei de Morgan) e da definição de topologia. □

Um tipo de conjunto que tem uma topologia natural associada são os espaços métricos. Lembremos a definição de espaço métrico.

Definição 3.3. Dizemos que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma distância no conjunto X se

- $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$;
- $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$.

Dizemos que o par (X, d) é um **espaço métrico**. Ou dizemos que X é métrico quando está claro a métrica considerada.

Exemplo 3.4. Seja (X, d) um espaço métrico. Então considere a família $\mathcal{T}$ de X tal que $A \in \mathcal{T}$ se e somente se $\forall x \in A$ existe uma bola $B_d(x, r)$ centrada em x e raio r inteiramente contida em A. A família $\mathcal{T}$ é uma topologia para X.

Temos que checar as condições da Definição 3.1.

- Claro que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- Sejam A_α uma família qualquer de elementos de $\mathcal{T}$, dado $x \in \cup_\alpha A_\alpha$, então $x \in A_{\alpha_0}$. Por definição existe uma bola $B(x, r) \subset A_{\alpha_0} \subset \cup_\alpha A_\alpha$, logo $\cup_\alpha \in \mathcal{T}$.
- Sejam $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$. Seja $x \in \cap_i A_i$, então existem bola $B(x, r_i) \subset A_i$. Tome r_0 o mínimo dos r_i, então $B(x, r) \subset \cap_i A_i$, logo $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$.

Note que dado um conjunto X se definirmos $\mathcal{T}$ como o conjunto das partes de X, então X é um espaço topológico com a topologia $\mathcal{T}$. Esta topologia é chamada de **topologia discreta**, isso porque todo ponto é aberto. No outro extremo a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ é conhecida como **topologia trivial** ou **topologia indiscreta**.

Exemplo 3.5. Seja X um conjunto com finito elementos.

- Se (X, d) um espaço métrico, então a topologia induzida pela métrica é a discreta.
- Se X tem mais de um ponto, então a topologia trivial não é induzida por uma métrica.

Definição 3.6. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é metrizável se existe uma métrica (distância) tal que a topologia gerada pela métrica coincide com a topologia $\mathcal{T}$.

Proposição 3.2. *Sejam X e $\mathcal{T}$ uma topologia para X. Então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta se, e somente se, $x \in X$ é aberto $\forall x \in X$.*

Proof. Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, então x é aberto $\forall x \in X$ pela definição. Se todo x é aberto, então dado um conjunto $A \subset X$ qualquer, como $A = \cup_{x \in A}\{x\}$ é a união de abertos, então A é aberto. □

Definição 3.7. Sejam $\mathcal{T}_0$ e $\mathcal{T}_1$ duas topologias para X tais que

$$\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1,$$

então dizemos que $\mathcal{T}_0$ é *menor* $\mathcal{T}_1$ ou que $\mathcal{T}_1$ é maior que $\mathcal{T}_0$.

3.1 Base para topologia

Definição 3.8. Seja X um conjunto, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base** para topologia em X se satisfaz:

- Para cada $x \in X$ existe um elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;
- Se $x \in B_0 \cap B_1$ e $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$, então existe $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_2 \subset B_0 \cap B_1$.

Definição 3.9. Seja $\mathcal{B}$ uma família base para uma topologia em X, como definido acima. Definamos a **topologia $\mathcal{T}$ gerada por $\mathcal{B}$** como: $A \in \mathcal{T}$ se e somente se $\forall x \in A$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

Proposição 3.3. *A topologia gerada por $\mathcal{B}$ é de fato uma topologia.*

Proof.
- Note que $\emptyset, X \subset \mathcal{T}$. No caso para $X \in \mathcal{T}$ estamos usando que como base todo ponto está em algum elemento da base.
- Seja $\cup_\alpha A_\alpha$ com $A_\alpha \in \mathcal{T}$. Então essa união está em $\mathcal{T}$ pois dado x nesta união $x \in A_{\alpha_0}$ e por definição existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $x \in B \subset A_{\alpha_0}$
- Vamos ver que a interseção finita está também. Seja $\cap_1^n A_i$, dado x na interseção então existe $B_i \in \mathcal{T}$ que contém x, como $\mathcal{B}$ é base existe um $B_0 \subset \cap_1^n B_i \subset \cap_1^n B_i$.

□

Proposição 3.4. *Seja $\mathcal{B}$ uma base para a topologia $\mathcal{T}$, então dado $U \in \mathcal{T}$,*

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}, B \subset U} B.$$

Dada uma topologia queremos encontrar uma base para ela

Proposição 3.5. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma família de conjuntos abertos de X tais que: para todo aberto U e todo $x \in U$ existe um elemento B de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Então $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de X.*

Proof. A prova tem duas partes.

Primeira parte: Vamos checar que $\mathcal{B}$ é base para uma topologia. Dado $x \in X$, como X é aberto então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$. Seja $x \in B_0 \cap B_1$, como B_0, B_1 são abertos, então a interseção é aberta, logo existe $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_2 \subset B_0 \cap B_1$.

Segunda parte: Precisamos ver que a topologia que $\mathcal{B}$ gera é de fato $\mathcal{T}$. Vamos chamar de $\mathcal{T}_0$ a topologia gerada por $\mathcal{B}$. Dado $U \in \mathcal{T}$, note que U é união de elementos de $\mathcal{B}$, que são abertos. Logo $U \in \mathcal{T}_0$. Agora seja $V \in \mathcal{T}_0$, então V é união de elementos de $\mathcal{B}$, que são abertos da topologia, logo a união está na topologia, assim $V \in \mathcal{T}$. Logo $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.

□

Exemplo 3.10. Duas topologias em $\mathbb{R}$ maiores que a topologia canônica de $\mathbb{R}$ porém não comparáveis entre si.

A topologia canônica de $\mathbb{R}$ é a gerada pelos conjuntos da forma (a, b). Note que essa família é base de uma topologia (no caso chamamos da topologia canônica ou usual). Consideremos duas famílias de conjuntos, que também formam base de uma topologia (Exercício). Considere a família dada pelos conjuntos $[a, b)$. Denotamos a topologia gerada por essa família de $\mathcal{T}_l$. Agora considere $K := \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$, agora consideremos a família de conjuntos da forma (a, b) e $(a, b) \setminus K$. Denotamos a topologia gerada por esses conjuntos de $\mathcal{T}_K$.

Agora vejamos que essas topologias são estritamente maiores que a topologia canônica. Dado $(a, b) \in \mathcal{T}$ e $x \in (a, b)$ então $[x, b) \in \mathcal{T}_l$ e $[x, b) \subset (a, b)$. Ou seja como os abertos de $\mathcal{T}$ são gerados pelos abertos de $\mathcal{T}_l$. Isto é $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_l$. Agora vamos ver que $\mathcal{T}_l$ é estritamente maior. Dado um elemento $[a, b)$ não temos um elemento da forma (c, d) que contém a e esteja contido em $[a, b]$.

Claramente $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_K$. Para ver que a topologia é estritamente maior seja $\mathcal{U} = (-1, 1) \setminus K$, dado o ponto $0 \in \mathcal{U}$ note que não existe um conjunto da forma (a, b) que contém 0 e esteja contido em $\mathcal{U}$.

Agora queremos ver que $\mathcal{T}_l$ e $\mathcal{T}_K$ não são comparáveis. Note que o conjunto $\mathcal{U}$ definido acima não está na topologia $\mathcal{T}_l$. E dado $[0, 1) \in \mathcal{T}_l$ não temos um gerador de $\mathcal{T}_K$ que contém 0 e esteja contido em $[0, 1)$, já que os geradores são da forma (a, b) ou $(a, b) \setminus K$.

Em 1955 Furstenberg, enquanto era aluno de graduação, deu uma prova da infinitude dos números primos utilizando topologia.

Teorema 3.11 (Furstenberg). *Existem infinitos números primos*

Proof. Para $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b > 0$ definamos

$$N_{a,b} = \{a + nb \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Agora definimos uma topologia em $\mathbb{N}$ da seguinte forma: $\mathcal{U}$ é um aberto se $\mathcal{U} = \emptyset$ ou se para todo $a \in U$ existe $b > 0$ tal que $N_{a,b} \subset U$. É fácil checar que uma tal família forma uma topologia. A propriedade da interseção segue pelo fato que se $\alpha \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ e $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ então existem b_1 e b_2 tais que $\alpha \in N_{0,b_1} \cap N_{0,b_2}$. A propriedade da interseção finita seguirá do fato que $N_{0,b_1 b_2} \subset N_{0,b_1} \cap N_{0,b_2}$. Note que vale o seguinte

- Qualquer conjunto aberto é infinito;
- Todo conjunto $N_{a,b}$ é fechado.

A primeira afirmação vem porque todo aberto é união desses conjuntos bases que são infinitos. A segunda afirmação segue diretamente da igualdade

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \backslash \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}.$$

Seja P o conjunto dos números primos. Note quem

$$\mathbb{Z} \backslash \{1, -1\} = \bigcup_{p \in P} N_{0,p}.$$

Se houvessem finitos números primos então $\bigcup_{p \in P} N_{0,p}$ seria uma união finita de fechados, portanto um conjunto fechado. Portanto $\mathbb{Z} \backslash \{1, -1\}$ seria fechado e $\{1, -1\}$ um aberto finito, o que é absurdo. Logo existem infinitos números primos.

$\square$

Conversando 1. Quantas topologias existem num conjuto finito? Um artigo que me parece interessante no tema é o artigo do Parchamann na Amer. Math. Montlhy *On the Number of Topologies on A Finite Set*. A resposta tem a ver com matrizes com entradas zero ou um. Matrizes com entrada zero ou um tem a ver com dinâmica simbólica, será que dá para relacionar isso de alguma forma com dinâmica simbólica? Olha lá e se você se interessar conversamos.

3.2 Exercícios

Exercício 3.1. Seja $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ uma família de topologias em um espaço X, então $\cap \mathcal{T}_\alpha$ é uma topologia para X.

Exercício 3.2. Dê um exemplo em que $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são topologias de X, mas $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ não é topologia.

Exercício 3.3. Mostre que dada uma família qualquer $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ de topologias existem:

- Uma única topologia que é maior que todas as topologias $\mathcal{T}_\alpha$;
- Uma única topologia que é maio que qualquer outra com a propriedade de estar contida em $\mathcal{T}_\alpha$ para todo α.

Exercício 3.4. Seja $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, defina a família de cilíndros $\mathcal{C}$ definida por conjuntos da forma

$$\{\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}\ |\alpha_{i_0} = a_0, \alpha_{i_1} = a_1, \ldots \alpha_{i_l} = a_l\ \}$$

onde $i_0, l \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \{0,1\}$.

- Prove que a familia $\mathcal{T}$ definida como os conjuntos $\mathcal{U}$ que são uniões de cilindros forma uma topologia;
- Exiba uma base para a topologia definida acima;
- A topologia $\mathcal{T}$ é metrizável?

Exercício 3.5. Na Definição 3.3 o primeiro item é redundante dos outros itens.

Exercício 3.6. Seja X um conjunto finito, prove que

$$d(A,B) = \#A \triangle B$$

é uma métrica.

Exercício 3.7. Encontre as possíveis topologias para o conjunto $X = \{a,b,c\}$. Quais dessas é induzida por uma métrica e quais não são?

Exercício 3.8. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases para as topologia $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ respectivamente. Então são equivalentes:

- $\mathcal{T}'$ é maior que $\mathcal{T}$;
- $\forall x \in X$ e para todo $B \in \mathcal{B}$ que contém x, então existe um elemento de $\mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Exercício 3.9. Dado um conjunto X a topologica cofinita $\mathcal{T}$ em X é definida pelo conjunto vazio e pelos conjuntos tais que o complementar tem uma quantidade finita de elementos. Prove que a topologia cofinita é de fato uma topologia.

Exercício 3.10. Seja X e $\mathcal{T}$ uma família que contém o vazio e conjuntos U tais que U^c tem uma quantidade no máximo enumerável de pontos. Prove que:

- $\mathcal{T}$ é uma topologia;
- Descreva as sequências convergentes de X com respeito a essa topologia;
- Prove que se X for não enumerável então existe um subconjunto $Y \subset X$ tal que o fecho contém pontos que não são limites de sequências convergentes em X.

4 Mais topologias

Nas próximas seções veremos formas naturais de obter espaços topológicos de outros espaços topológicos.

4.1 Topologia Produto

Quando temos dois espaços topológicos o produto cartesiano possui uma topologia natural.

Definição 4.1. Dados X e Y espaços topológicos, então a topologia produto em $X \times Y$ é a topologia gerada pela base para uma topologia $\mathcal{B} = \{U \times V \ : \ U \in \mathcal{T}_A, V \in \mathcal{T}_Y\}$.

Proposição 4.1. *A topologia produto está bem definida.*

Proof. Ou seja, queremos ver que $\mathcal{B}$ acima é de fato base para uma topologia.

- Se $(x, y) \in X \times Y$, então como X e Y são abertos segue que $(x, y) \in X \times Y \in \mathcal{B}$;
- Dados $(x, y) \in \mathcal{U}_1 \times V_1 \bigcap \mathcal{U}_2 \times \mathcal{V}_2 = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \times (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$. Assim sejam $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ e $y \in \mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. Assim $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset \mathcal{U}_1 \times V_1 \bigcap \mathcal{U}_2 \times \mathcal{V}_2$.

Portanto uma base. □

De fato temos que

Teorema 4.2. *Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases para as topologias de X e Y, então*

$$\mathcal{D} := \{B \times C \ : \ B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

é base para topologia produto de $X \times Y$.

Proof. Seja um aberto $\mathcal{U}$ de $X \times Y$ e $(x, y) \in \mathcal{U}$. Pela definição de topologia produto, então existem abertos $x \in \mathcal{U}_x$ e $y \in \mathcal{U}_y$. E portanto existem abertos $B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$ tais que $x \in B \subset \mathcal{U}_x$ e $y \in C \subset \mathcal{U}_y$. Assim $\mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y \subset B \times C$. Pela Proposição 3.5 segue o teorema. □

Exemplo 4.3. A topologia usual de $\mathbb{R}^2$ é dada pela topologia produto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A topologia usual de $\mathbb{R}$ tem como base o conjunto $\mathcal{B} = \{(r - p, r + p) \ : \ r, p \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}$. Note que $\mathcal{B}$ é uma família enumerável. Assim $\mathbb{R}^2$ possui uma base com família enumerável $\mathcal{D} = \{\mathcal{I} \times \mathcal{J} : \mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{B}\}$.

4.2 Topologia induzida: Subespaço

Definição 4.4. Seja X um espaço topológico com a topologia $\mathcal{T}$. Se $Y \subset X$, então a topologia induzida em Y é definida por

$$\mathcal{T}_Y := \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}.$$

Dizemos também que Y é um subespaço de X.

Proposição 4.2. *A definição de topologia induzida está bem definida.*

Proof. Exercício. $\square$

Proposição 4.3. *Se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de X então*

$$\mathcal{B}_Y := \{Y \cap U : U \in \mathcal{B}\}$$

é base para a topologia induzida em Y.

Proof. Seja U aberto em X e $y \in U \cap Y$. Tome $B \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B \subset U$, então $B \cap Y \subset U \cap Y$. Logo pela Proposição 3.5. $\square$

Exemplo 4.5. Se Y é um subespaço de X e U um aberto em Y, então U é aberto em X.

Proof. U é aberto em Y então $U = Y \cap V$ com V aberto em X. Mas $Y \cap V$ é aberto. $\square$

Teorema 4.6. *Se A é um subespaço de X e B é um subespaço de Y, então a topologia produto em $A \times B$ é a mesma topologia que a induzida por $X \times Y$.*

Proof. O conjunto $U \times V$ é uma base para $X \times Y$. Assim $(U \times V) \cap (A \times B)$ é base para a topologia induzida. Mas

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

$\square$

4.3 exercicios

Exercício 4.1. Sejam $Z \subset Y \subset X$ e X um espaço topológico. Considere Y com a topologia induzida por X, então a topologia induzida por Y em Z e a topologia induzida por X em Z são as mesmas.

Exercício 4.2. Resolva os itens:

$Y \subset X$ é aberto se e somente se todo aberto da topologia induzida em Y é um aberto em X;

O resultado é verdade trocando aberto por fechado?

Exercício 4.3. Seja X um espaço topológico e $S, T \subset X$. Seja $U \subset S \cap T$ tal que é aberto em S e em T. Será que U é aberto em $S \cup T$?

5 Conjunto fechado, aderente etc

Definição 5.1. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X, então o fecho do conjunto A é o conjunto $\overline{A}$ definido por

$$\overline{A} := \bigcap\{F \subset X : F \text{ fechado}, A \subset F\}$$

também podemos dizer que $\overline{A}$ é a aderência de A.

Ou seja, note que $\overline{A}$ é o menor subconjunto fechado de X que contém A.

Proposição 5.1. *Valem as propriedades*

- $\overline{A}$ *é um conjunto fechado;*
- $A = \overline{A}$ *se, e somente se,* A *é fechado;*
- $A \subset \overline{A}$*;*
- *se* $A \subset B$*, então* $\overline{A} \subset \overline{B}$*;*
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$*;*
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*;*

Proof. Vamos provar o último item, os outros são exercícios. Note que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ estão contidos em $\overline{A \cup B}$, temos também que $\overline{A} \cup \overline{B}$ é um conjunto fechado. Assim como $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ então $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$. □

Definição 5.2. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X, então o interior do conjunto A é denotado por $int(A)$ e definido como

$$int(A) := \bigcup\{U \subset X : U \text{ aberto}, U \subset A\}$$

Note que $int(A)$ é um conjuto aberto. De fato o maior aberto contido em A.

Proposição 5.2.

$$X\backslash\overline{A} = int(X\backslash A),\ X\backslash int(A) = \overline{(X\backslash A)}$$

Proof. Aplicar lei de morgan. □

Proposição 5.3. *Seja X um espaço topológico*

- *$int(A)$ é um conjunto aberto;*
- *$int(A) = A$ se, e somente se, A é aberto;*
- *$int(A) \subset A$;*
- *$int(int(A)) = int(A)$;*
- *$int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$.*

Proof. Exercício. □

Agora vamos pensar, quantos conjuntos diferentes conseguimos obter usando o fecho e o complemento de um conjunto? A responsta é um surpreendente 14.

Teorema 5.3 (Kuratowski)**.** *Dado um espaço topológico e um conjunto $A \subset X$ o número máximo de conjuntos que conseguimos obter aplicando o fecho e o complementar é 14.*

Proof. Para facilicar a notação, vamos denotar kA como o fecho de A e cA para o complementar de A. É fácil ver que

- $kkA = kA$;
- $ccA = A$;

Ou seja, pelas duas propriedades acima dada qualquer sequência de operações ela pode ser simplificada a uma uma sucessão alternada de k e c. Mas essa sucessão vai ter que parar uma hora, isso segue de:

Afirmação: $kckckckcA = kckcA$.

De fato, vamos denotar iA como o interior do conjunto A. Assim, $kikiA = kiA$ e $iA = ckcA$.

Ou seja podemos ter como possíveis conjuntos

$$\{A, cA, kcA, ckcA, kckcA, ckckcA, kckckcA, ckckckcA\}$$

$$\bigcup$$

$$\{kA, ckA, kckA, ckckA, kckckA, ckckckA\}$$

O último conjunto é porque $kckckckA = kckckckc(cA) = kckc(cA)$.

Agora precisamos dar um exemplo com 14 possibilidades. Fica como exercício checar que o conjunto

$$(0,1) \cup (1,2) \cup \{3\} \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q})$$

como subespaço da reta real tem as 14 possibilidades.

$\square$

Conversando 2. Se você quiser se aprofundar no tema do Teorema 5.3 o artigo "The Kuratowski closure-complement theorem" de Gardner e Jackson (pdf aqui) parece legal. Eu não tive de tempo de ler com cuidado. Se você olhar depois me conta.

Exercício 5.1. Mostre que aplicando o fecho e o interior podemos obter no máximo 7 conjuntos distintos. Dê um tal exemplo.

Proposição 5.4. *Seja X um espaço topológico e Y um subespaço de X. Então $A \subset Y$ é fechado em Y se e somente se $A = F \cap Y$ onde F é fechado em X.*

Proof. Suponha $A \subset Y$ fechado de Y. Então $A^c \cap Y$ é um aberto de Y. Assim existe um aberto W tal que $A^c \cap Y = W \cap Y$. Considere o conjunto fechado $F := W^c$. Note que $A = W^c \cap Y$, isso segue do fato que $(A^c \cap Y)^c \cap Y = (W \cap Y)^c \cap Y = W^c \cap Y$. Que é o que queríamos provar.

No caso em que $A = F \cap Y$ para F fechado de X, então note que o complementar de A em Y é $A^c \cap Y = (F^c \cup Y^c) \cap Y$. $\square$

Definição 5.4. O ponto x de um espaço topológico X é chamado de ponto **aderente** ao conjunto A se para todo aberto U que contém x vale $U \cap A \neq \emptyset$. E dizemos que x é de **fronteira** do conjunto A se para todo aberto U contendo x tem-se que $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap A^c \neq \emptyset$.

Denotamos também o conjunto dos elementos de fronteira de um conjunto A por ∂A.

Proposição 5.5. *Seja X um espaço topológico. Então*

$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ é aderente a } A\}.$$

Proof. Denotemos por D o conjunto dos pontos aderentes a A.

Provemos que $\overline{A} \subset D$. Suponha, por absurdo, que existe $x \in \overline{A}$ tal que x não é aderente a A. Isso significa que existe um aberto U que contém x e $U \cap A = \emptyset$. Mas $A \subset U^c$, logo $\overline{A} \subset U^c$, mas é um absurdo porque $x \in U$.

Agora vejamos que $D \subset \overline{A}$. Tome $x \in D$, suponha, por absurdo, que $x \notin \overline{A}$. Então $x \in (\overline{A})^c$ que é um aberto e como $A \subset \overline{A}$ temos que $(\overline{A})^c \cap A = \emptyset$ o que é absurdo com o fato que $x \in D$. $\square$

Exemplo 5.5. Seja X um conjunto munido da topologia discreta. Então para qualquer $A \subset X$ vale que $\overline{A} = A$ e $int(A) = A$.

Exemplo 5.6. Com a topologia usual da reta note que:

- $\overline{(a,b)} = [a,b]$;
- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$;
- $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$;
- $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Exemplo 5.7. Considere a seguinte distância em $\mathbb{R}$ $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Note que $F_n = [n, \infty)$ é fechado e limitado, mas $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

Exemplo 5.8. Seja X um conjunto com mais de um ponto e defina a métrica d em X por $d(x,y)$ é 0 se $x = y$ e 1 se $x \neq y$. Note que $B(x,1) = \{x\}$ e $\overline{\{x\}} = \{x\}$ e $B[x,1] = X$. Ou seja o fecho da bola aberta é diferente do fecho da bola fechada.

5.1 Exercícios

Exercício 5.2. Dado $A \subset X$ com X espaço topológico, então ∂A é um conjunto fechado.

Exercício 5.3. Prove que para um espaço topológico X e $A \subset X$;

- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$;
- $int(A) \cap \partial A = \emptyset$;
- $\partial A = \overline{A} \backslash int(A)$;
- $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Exercício 5.4. Seja $Y \subset X$, descreva o fecho de Y com a topologia induzida por X quando

- X tem a topologia discreta
- X tem a topologia cofinita

Exercício 5.5. Verdadeiro ou Falso?

- $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;
- $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$;
- $int(A \cup B) \supset int(A) \cup int(B)$;
- $int(A \cup B) \subset int(A) \cup int(B)$.

Exercício 5.6. Prove que

- $\overline{A} = A \cup \partial A$;
- $int(A) = A \backslash \partial A$.