# Lista 5

**Exercício 1.** Seja $\phi$ um fluxo que preserva volume em $M$, com $Vol(M) = 1$. Prove que dado um aberto qualquer $U \subset M$ e $T_0 \in (0, \infty)$, então existe $x \in M$ e $T > T_0$ tal que $\phi(T, x) \in U$.

Vamos assumir o seguinte fato: se um campo $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tem divergente nulo, então o fluxo preserva a medida de volume. Lembre que o divergente de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ é a função $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$. Uma classe importante de fluxos que preservam volume são os fluxos Hamiltonianos.

**Exercício 2.** Vamos estudar o fluxo Hamiltoniano em dimensão dois. Seja $H\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função suave. Considere a EDO: $x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$, $y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$.

- Mostre que o fluxo preserva o volume;
- Se $\gamma$ for um solução da EDO, então $H$ é constante restrita a imagem de $\gamma$.

**Exercício 3.** Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo em uma variedade compacta. Se todo ponto fixo de $f$ é hiperbólico, então $f$ tem finitos pontos fixos.

**Exercício 4.** Seja $X$ um campo suave em $\mathbb{R}^2$ com apenas uma singularidade $p$ e esta singularidade é hiperbólica. Se para toda vizinhança $U$ existem pontos $P_U$ e $Q_U$ tais que o omega limite de $P_U$ é $p$ e o omega limite de $Q_U$ é vazio, então prove que $DX$ possui dois autovalores distintos com parte real maior que zero e outro menor que zero.