Lista 4

Exercício 1. Faça os exercícios deixados em sala. Converse com seus colegas.

Exercício 2. Mostre que não existe um campo de vetores com órbita transitiva em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 3. Seja $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo suave em $\mathbb{R}^n$. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma curva solução do campo. Seja $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que $\psi(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Agora considere o novo campo $Y(x) = \psi(x)X(x)$. Perceba que esse novo campo é apenas mundando a intensidade do campo antigo. Será que as soluções desse novo campo é a solução do campo antigo só que mudando a velocidade da curva? Em outras palavras se β for uma curva solução do campo Y com $\beta(0) = p$, então a imagem de γ é igual a imagem de β ?

Exercício 4. Encontro os conjuntos α e ω limites para todos os pontos do campo em $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{aligned} X_1(x,y) &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ X_2(x,y) &= -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Exercício 5. Considere os campos lineares em $\mathbb{R}^2$ dados pelas matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ prove que esses dois campos não são topologicamente conjugados.

Exercício 6. Seja X um campo de vetores suave em $\mathbb{R}^n$ qual a relação entre os conjuntos α e ω limites de X e $-X$.

Exercício 7. Prove que existe um campo de vetores suaves na esfera S^2 que se anula em apenas um ponto. (Dica: usa a projeção estereográfica).

Exercício 8. Seja X um campo suave em $\mathbb{R}^2$. Se γ é uma órbita fechada de X então existe uma singularidade do campo X no interior da componente conexa limitada delimitada por γ. (Dica: Teorema 1 do Sotomayor na parte "Aplicações do teorema de Poincaré-Bendixon).

Exercício 9. Seja X um campo suave na esfera S^2 contendo uma singularidade. Prove que:

- O conjunto alfa limite e omega limite de qualquer ponto é um subconjunto próprio de S^2.

- O conjunto alfa limite e omega limite de qualquer ponto é a singularidade do campo.

Prove que todo alfa limite e omega limite de qualquer ponto é sempre a singularidade desse campo.

Exercício 10. Como feito em sala vamos construir um fluxo legal (caótico) em uma variedade três dimensional. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Mostre que A induz uma aplicação no toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, vamos chamar essa aplicação de $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$;

- Mostre que o conjunto $A_k = \{(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}) | 1 \leq i, j \leq k\}$ é f invariante (i.e. $f(A_k) = A_k$. Assim, conclua que os pontos periódicos (ou seja os pontos $p \in \mathbb{T}^2$ tais que existe $n \in \mathbb{N}$ $f^n(p) = p$). de f são densos no toro.

- Mostre que dados dois abertos U e V então existe um n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

- Seja V_i uma base enumerável da topologia de $\mathbb{T}^2$. O conjunto $B := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ é diferente de vazio e se $x \in B$ então $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é denso em $\mathbb{T}^2$.

- Construa um fluxo que tenha ponto com órbita densa e que também as órbitas periódicas formem um conjunto denso.