Lista 2 - EDO

Exercício 1. Verdadeiro ou Falso?

Considere a EDO $x' = f(x,t)$ em $\mathbb{R}^n$ e para todo tempo.

a) Seja $\gamma(t)$ uma solução para a EDO tal que $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = x_0$. Então dada uma vizinhança U_{x_0} de x_0, implica que existe $\epsilon > 0$ tal que se $g(x,t)$ é tal que $|g(x,t) - f(x,t)| < \epsilon$ para todo x e t, então a solução $\eta(t)$ de $x' = g(x,t)$ tal que $\eta(0) = 0$ satisfaz $\eta(1) \in U_{x_0}$

b) Dado $\epsilon > 0$, então existe um $\delta > 0$ tal que se $|g(x,t) - f(x,t)| < \delta$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, então $|\gamma(t) - \eta(t)| < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Onde γ e η são soluções das respectivas EDO com mesmo dado inicial $\gamma(0) = \eta(0) = 0$.

Exercício 2. Seja $f(x) = \frac{x^2-1}{2}$ e considere a EDO $x' = f(x)$. Veja se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) Esta EDO tem unicidade de solução.

b) Seja $\gamma(t)$ solução tal que $\gamma(0) = 0$. Então $\gamma(t)$ tende a infinito quando t tende a infinito;

c) Seja $\gamma(t)$ solução tal que $\gamma(0) = -10$. Então $\gamma(t)$ tende -1 quando t tende a infinito;

d) Seja $\gamma(t)$ solução tal que $\gamma(0) = 7$. Então $\gamma(t)$ tende a infinito quando t tende a infinito.

Exercício 3. Descreva todas as soluções para a EDO:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= -\beta x + \alpha y \end{aligned}$$

Exercício 4. Considere a EDO na forma matricial $X' = AX$ onde A é uma matriz. Prove que

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Exercício 5. Verdadeiro ou falso

a) O espaço das soluções de $x' = Ax$ é um espaço vetorial;

b) O espaço das soluões de $x' = A(t)x$ é um espaço vetorial;

c) O espaço das soluões de $x' = A(t)x + b(t)$ é um espaço vetorial;