Álgebra Linear - Lista 9

1. Encontre a matriz canônica de cada transformação linear e calcule a imagem do vetor v.

   (a) $T(x, y) = (x + 2y, x - 2y)$, $v = (1, -1)$.

   (b) $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z - x)$, $v = (1, 2, 3)$.

   (c) $T(x, y) = (5x + y, 0, 4x - 5y)$, $v = (0, 4)$.

   (d) $T(x, y, z) = (3x - 2z, 2y - z)$, $v = (4, -5, 2, -1)$.

   (e) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, $v = (0, -1, 1, 0)$.

2. Encontre as matrizes canônicas A e A' para $T = T_2 \circ T_1$ e $T' = T_1 \circ T_2$.

   (a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$
   $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_2(x, y) = (y, 0)$.

   (b) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_1(x, y) = (-2x + 3y, x + y, x - 2y)$
   $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - 2y, z + 2x)$.

3. Encontre a imagem do vetor v usando a matriz canônica e usando a matriz relativa as bases B e B'.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x, y)$, $v = (5, 4)$,
   $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$,
   $B' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$, $v = (2, 4, 6)$,
   $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$,
   $B' = \{(1, 1), (2, 1)\}$.

   (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_4 - x_1)$, $v = (4, -3, 1, 1)$,
   $B = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$,
   $B' = \{(1, 1), (2, 0)\}$.

4. Encontre a matriz A' com relação a base B'.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y, y - x)$, $B' = \{(1, -2), (0, 3)\}$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, z)$, $B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - 2y, 4x)$, $B' = \{(-2, 1), (-1, 1)\}$.

5. Sejam $T_1 : V \to V$ e $T_2 : V \to V$ transformações lineares injetoras. Mostre que a composição $T = T_2 \circ T_1$ é injetora e que existe inverso de T igual a $T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

6. Mostre que se A e B são matrizes similares, então $\det(A) = \det(B)$.

7. Seja $A = CD$, em que C e D são matrizes $n \times n$ com C invertível. Mostre que o produto DC é similar à A.

8. Mostre que se A e B são matrizes similares, então A^T e B^T também são similares.